I международный естественно-научный форум «Наука будущего»

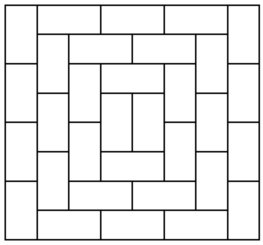
Игра «Домино». **Решения.** ***16 июня 2014 года.***

0–0. Во время занятия математического кружка Знайка предложил Незнайке сыграть 3 партии в следующую игру: «В начале партии ты называешь некоторое натуральное число N, каждый раз новое. Затем мы по очереди (ты – первый, я – второй) записываем в клетки квадрата 7×7 по одному целому числу от 1 до 49 включительно. В каждую клетку записывается ровно одно число, и каждое из чисел должно быть использовано ровно один раз. Если по окончании заполнения квадрата найдутся строка и столбец, в каждом из которых сумма чисел равна N, то выигрываешь ты. В противном случае выигрываю я». Незнайка в ответ заявил: «Я выиграю со счётом 3:0». Кто на самом деле выигрывает при правильной игре и с каким счётом? **(<u>При правильной игре со счётом 3:0 выиграет первый игрок, т.е. Незнайка</u>. Незнайка для своей победы со счётом 3:0 может применить следующую стратегию. Разобьёт клетки креста без центральной клетки на пары симметричных так, как показано на рисунке (клетки с одинаковыми буквами входят в одну пару). Затем в начале первой партии назовёт число N=196, второй – N=175, третьей – N=154. В первой партии разобьёт числа на 24 пары с суммой 49 – (1,48), (2,47), …, (24,25), число 49 остаётся без пары, им Незнайка и сделает первый ход в центральную клетку. Во второй партии разобьёт числа на 24 пары с суммой 50 – (1,49), (2,48), …, (24,26), число 25 остаётся без пары, им Незнайка и сделает первый ход в центральную клетку. В третьей партии разобьёт числа на 24 пары с суммой 51 – (2,49), (3,48), …, (25,26), число 1 остаётся без пары, им Незнайка и сделает первый ход в центральную клетку. Затем в каждой партии на ходы Знайки он будет отвечать следующим образом: 1). Если Знайка сходил в одну из клеток креста, то Незнайка отвечает парным числом соответствующей пары в парную клетку соответствующей клетки в этом кресте. 2). Если Знайка сходил в одну из клеток, не входящих в крест, то Незнайка отвечает парным числом соответствующей пары в любую свободную клетку, не входящую в крест. Таким образом, за парный ход (Знайка – Незнайка) они будут использовать одну из пар чисел. В результате в конце каждой партии Незнайка получит в строке и столбце креста суммы, равные сумме центрального числа и трёх пар разбиения, т.е. соответственно 49+3·49=196, 25+3·50=175, 1+3·51=154, что и приведёт его к победе со счётом 3:0.)**

			a			
			b			
			c			
d	*e*	*f*		*f*	*e*	*d*
			c			
			b			
			a			

0–1. Стороны треугольника увеличили в два раза. Во сколько раз увеличится площадь треугольника? **(<u>в 4 раза</u>)**

0–2. Пару доминошек 1×2 назовём *гармоничной*, если они образуют квадрат 2×2. Приведите пример разбиения доски 8×8 на доминошки, в котором ровно одна *гармоничная* пара. **(см. рис.)**



0–3. Произведение трёх натуральных чисел равно 72000. Какое наименьшее значение может принимать их НОК – наименьшее общее кратное? **(<u>60</u>. Рассмотрим разложение на простые множители произведения этих трёх чисел $72000=2^6\cdot 3^2\cdot 5^3$. Т.к. НОК должен содержать в своём разложении на простые множители каждый простой делитель в наибольшей из степеней, присутствующих в разложениях каждого их трёх чисел, то в НОКе степень двойки должна быть не меньше 6:3=2, а степени тройки и пятёрки – не меньше 1,т.е. НОК$\geq 2^2\cdot 3\cdot 5=60$. В качестве примера таких трёх чисел с НОК=60 возьмём числа $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, 60 и $20=2^2\cdot 5$.)**

0–4. Решите в целых числах уравнение НОК (x^2, y)+НОК(x, y^2)=2015. **(<u>Решений нет</u>. Заметим, что оба слагаемых имеют одинаковую чётность, значит, сумма всегда чётная. Но 2015 – нечётное число.)**

0–5. Расставьте 6 слонов и 5 ладей на шахматной доске так, чтобы никакая фигура не била никакую другую фигуру.

С						С	
				Л			
С						С	
		Л					
	Л						
							Л
					Л		
С			С				

0–6. Найдите наибольшее трёхзначное число, которое при делении на 43 даёт остаток, равный частному. **(<u>968</u>, т.к. наше число равно $43n+n=44n$, где n – целое неотрицательное число, меньшее 43, значит, надо найти наибольшее трёхзначное число, делящееся на 44 и удовлетворяющее оценке для числа n, а это 968=44·22.)**

1–1. Сегодняшнюю дату 16 июня 2014 года можно сейчас записать как 16.06.14 (по-русски) или 06.16.14 (по-английски). А какая ближайшая в будущем дата будет одинаково записана и по-русски, и по-английски? **(07.07.14 – 7 июля 2014 года)**

1–2. Во сколько раз сумма углов восьмиугольника больше суммы углов четырёхугольника? **(В 3 раза, т.к. сумма углов восьмиугольника равна 180°·6, а четырёхугольника - 180°·2, что можно получить, разрезав диагоналями из одной вершины оба многоугольника на треугольники.)**

1–3. Сколько существует девятизначных чисел, произведение цифр которых равно 9? **($45=9+C_9^2=9+36$, т.к. это либо числа с одной 9 и восемью 1 (всего 9 чисел), либо числа с двумя 3 и семью 1 (всего их – количество сочетаний из 9 по 2 $C_9^2=\frac{9\cdot 8}{2}=36$).)**

1–4. Найдите наибольший простой делитель числа 3999879. **(2011, т.к. $3999879=4000000-121=2000^2-11^2=(2000-11)\cdot(2000+11)=1989\cdot 2011$)**

1–5. Сколько существует треугольников с целочисленными сторонами, периметр которых равен 10? **(2 треугольника – со сторонами (2, 4, 4) и (3, 3, 4). Упорядочим стороны треугольника $a\le b\le c$, тогда по принципу Дирихле $c\ge P/3=10/3$, а по неравенству треугольника $c<a+b \Leftrightarrow c<P/2=5$. Значит, $c=4$, $a+b=6$. Тогда по принципу Дирихле $b\ge 3$, кроме того, $b\le c=4$. Получаем два случая для b – 3 и 4.)**

1–6. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого все цифры различны и сумма любых двух из них является составным числом. **(97531. Разобьём цифры на пары следующим образом: (9;8), (7;6), (5;2), (4;3), (1;0). Сумма чисел в паре не является составным числом, поэтому в искомом числе присутствует не более одной цифры из каждой пары. Значит, искомое число содержит не более 5 знаков и не превосходит 97541. Поскольку 4+7=11, то искомое число не превосходит 97531.)**

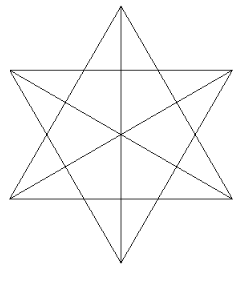
2–2. Цена за вход на стадион 30 рублей. Для увеличения дохода были снижены цены, при этом количество посетителей увеличилось наполовину, а доход – на четверть. На сколько рублей была снижена цена на билет? **(5 рублей. Доход увеличился в 5/4 раза, а посещаемость в 3/2 раза, значит, цена билета изменилась в 5/4:3/2=5/6 раза, т.е. уменьшилась на шестую часть, равную 5 рублям.)**

2–3. Какую процентную концентрацию будет иметь раствор соли, если слить вместе 2 литра 30-% раствора и 3 литра 20-% раствора? **(24%. Всего в 5 литрах смеси будет 2×0,3+3×0,2=1,2 л чистой соли, т.е. 1,2:5×100%=24%.)**

2–4. В равнобедренной трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями основания равны a и b. Чему равна высота трапеции? **($(a+b)/2$. Проведя высоту через точку пересечения диагоналей, замечаем, что каждый из двух получившихся кусочков равен половине соответствующего основания (это высоты из вершин прямых углов в равнобедренных прямоугольных треугольниках). Следовательно, высота равна $(a+b)/2$.)**

2–5. Найдите наибольшее число, в десятичной записи квадрата которого все цифры – различные. **($\sqrt{9876543210}$)**

2–6. Вернувшийся из похода рыцарь рассказал, что видел город, в котором 9 прямых улиц, на каждой улице по 5 перекрёстков (пересечений с другими улицами), а всего перекрёстков 19. Приведите пример такого города. **(например, см. рисунок)**



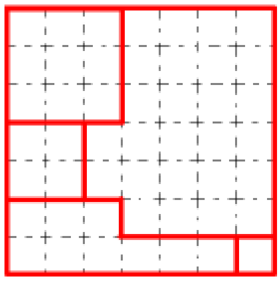
3–3. Расставьте в клетках квадрата 3×3 действительные числа (не обязательно различные) так, чтобы сумма любых двух соседних по горизонтали чисел была равна 6, а произведение любых двух соседних по вертикали чисел было равно 4. **(Например, в шахматном порядке числа $3+\sqrt{5}$ и $3-\sqrt{5}$.)**

3–4. Сколько существует четырёхзначных чисел, которые при зачеркивании первой цифры уменьшаются в 9 раз? **(7 чисел. Обозначив число за $\overline{abcd}$, получим уравнение $\overline{abcd}=9\overline{bcd}$, из которого следует, что $1000a+\overline{bcd}=9\overline{bcd}$, а значит, $125a=\overline{bcd}$. При значениях числа a от 1 до 7 и будут получаться трёхзначные числа $\overline{bcd}$. Таким образом, существуют 7 чисел с нужным свойством.)**

3–5. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2013, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2014, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=2015. \end{cases}$ **(*x* = 1/1007, *y* = 1/1006, *z* = 1/1008. Введём обозначения 1/*x*=*a*, 1/*y*=*b*, 1/*z*=*c*. Уравнения системы примут вид: *a*+*b*=2013, *b*+*c*=2014, *c*+*a*=2015. Сложив все равенства, получим 2(*a*+*b*+*c*)=6042, *a*+*b*+*c*=3021. Вычитая из этого равенства поочередно уравнения системы, получаем, что *c* = 1008, *a* = 1007, *b* = 1006, откуда уже найдём нужные нам числа.)**

3–6. Какую длину может иметь самонепересекающийся путь по сторонам клеток из верхнего левого угла в нижний правый угол квадрата 8×8? **(Любое чётное число от 16 до 80. Раскрасим 81 узел сетки в шахматном порядке и заметим, что каждым ходом мы меняем цвет узлов, но нужные нам узлы будут одного цвета, значит, всего будет чётное** число **ходов. При этом кратчайший путь будет** содержать **16 ходов (8 – по горизонтали и 8 – по вертикали), а самый длинный – 80 – проходит по всем узлам решётки. Остальные же чётные значения длины пути реализуются сокращением самого длинного пути на два узла.)**

4–4. Квадрат разрезали на равные прямоугольные равнобедренные треугольники. Сколько треугольников могло получиться? **($2n^2$ и $4n^2$, где *n* – любое натуральное число. Пусть катеты таких треугольников равны 1, тогда гипотенуза равна $\sqrt{2}$. Пусть вдоль стороны укладываются *a* гипотенуз и *b* катетов, а всего квадрат разрезан на *k* треугольников. Тогда подсчитаем площадь квадрата двумя разными способами и получим, что $(a\sqrt{2}+b)^2=\frac{k}{2}$. Т.к. *a*, *b*, *k* – целые числа, а $\sqrt{2}$ - иррациональное число, то либо *a*=0, либо *b*=0, откуда и получим, что $k=2b^2$, либо $k=4a^2$, где *a* и *b* могут быть любым натуральным числом, причём для каждого случая есть свой способ разрезания квадрата на треугольники. Пример: разрежем квадрат на n^2 равных квадратиков *n-1* вертикальными и *n-1* горизонтальными линиями (*n-1* может быть равно нулю). Для первого случая разрежем каждый квадрат по диагонали на два треугольника, для второго — двумя диагоналями на четыре треугольника.)**

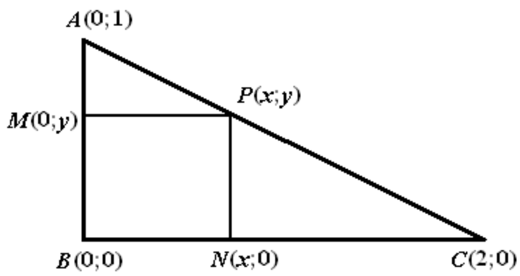


4–5. Разрежьте квадрат на 5 частей, из которых можно без пропусков и наложений сложить три попарно неравных квадрата. **(Воспользуемся равенством $2^2+3^2+6^2=4+9+36=49=7^2$, разделим квадрат на сетку 7×7, в которой выделим квадраты 2×2 и 3×3, а также три части, из которых очевидным образом складывается квадрат 6×6 (см. рис.). Можно также воспользоваться равенством $1^2+4^2+8^2=1+16+64=81=9^2$, построив соответствующую конструкцию.)**

4–6. Сумма трёх неотрицательных чисел *a*, *b*, *c* не превосходит $\frac{1}{2}$. Какое наименьшее значение может принимать выражение (1–*a*)(1–*b*)(1–*c*)? **(1/2, например, при *a*=1/2, *b*=*c*=0. Наше выражение (1–*a*)(1–*b*)(1–*c*)=1–(*a*+*b*+*c*)+*ab*(1–*c*)+*bc*+*ca*≥1–(*a*+*b*+*c*)≥1/2. При этом минимум достигается тогда, когда *a*+*b*+*c* =1/2, *ab*(1–*c*)+*bc*+*ca*=0, что возможно.)**

5–5. Сколькими способами можно заполнить таблицу 5×5 клеток нулями и единицами так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётной? **(65536 = 2^{16}, т.к. 16 чисел в левом верхнем квадрате 4×4 можно расставить произвольно, а оставшиеся числа в нижней строке и правом столбце уже будут расставляться однозначно.)**

5–6. В прямоугольном треугольнике *ABC* катеты *AB* и *BC* равны соответственно 1 и 2. На катетах и гипотенузе треугольника отмечают точки *M*, *N* и *P* соответственно, такие, чтобы сумма длин отрезков *PM*, *PN* и *PB* была наименьшей из возможных. Какое значение будет принимать эта сумма? **(2. При любом положении точки *P* на гипотенузе для минимизации суммы расстояний точки *M* и *N* должны оказаться проекциями точки *P* на катеты, тогда будем считать, что у нас точки имеют следующие координаты – *A*(0;1),**



B(0;0), C(2;0), P(x;y), M(0;y), N(x;0), откуда сумма $S = PM + PN + PB = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$, но в силу подобия прямоугольных треугольников AMP и ABC получаем, что $\frac{AM}{AB} = \frac{MP}{BC}$, т.е. $\frac{1-y}{1} = \frac{x}{2}$, откуда $x=2-2y$. Тогда $S = x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2 - y + \sqrt{x^2 + y^2} \geq 2 - y + \sqrt{y^2} = 2 - y + y = 2$ с учётом неотрицательности y. При этом S=2 при M=P=A и N=B.)

6–6. На полях $a1$, $a2$ и $b1$ шахматной доски стоят соответственно белая, чёрная и красная ладьи. Разрешается делать ходы по обычным правилам, однако после любого хода каждая ладья должна быть под защитой какой-нибудь другой ладьи (т.е. в одной горизонтали или вертикали с другой ладьёй). Сколько ещё других (не считая исходной) расстановок этих ладей на шахматной доске можно получить? **(<u>9407 расстановок</u>. Заметим, что эти три ладьи всегда располагаются в трёх клетках, лежащих в углах некоторого прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам доски («квартета» из четырёх клеток, находящихся на пересечении двух горизонталей и двух вертикалей). При этом их порядок по часовой стрелке совпадает с исходным, т.е. белая, чёрная и красная ладьи. Нетрудно убедиться, что возможно любое из таких расположений. Для этого ладьи сначала сдвигаются в три угла такого квартета (передвигаются в две вертикали, потом в две горизонтали квартета, сохраняя друг друга под защитой), а затем перемещаются по очереди по часовой стрелке через свободный угол. Всего существует $\left(C_8^2\right)^2 = \left(\frac{8 \cdot 7}{2}\right)^2 = 28^2 = 784$ таких квартетов, что определяется выбором двух горизонталей и двух вертикалей, на пересечении которых и будут находиться четыре угла соответствующего прямоугольника. В каждом таком прямоугольнике существуют 4·3=12 расстановок ладей по часовой стрелке, т.к. ладьи всегда образуют уголок, в центральной клетке которого может находиться любая ладья (3 варианта), а сама центральная клетка может находиться в любом из углов квартета (4 варианта). Учитывая исходный вариант, получим всего 784·12–1=9407 расстановок.)**