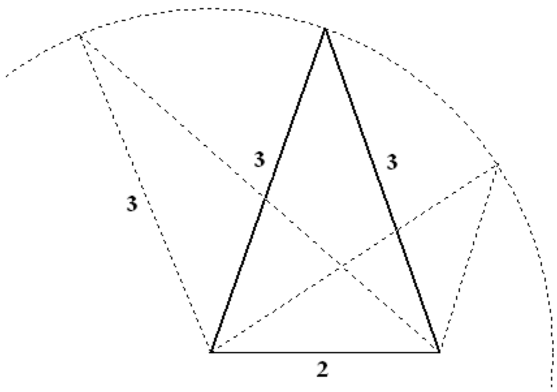
I международный естественно-научный форум «Наука будущего»

Игра «Пенальти». **Решения.** ***17 июня 2014 года.***

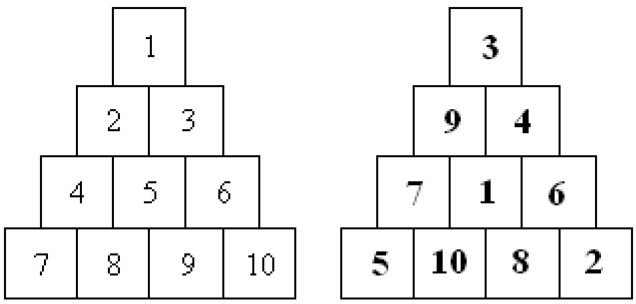
1. При каких целых n дробь $\frac{10n+7}{4n+5}$ будет сократимой? **($n \equiv 7 \pmod{11}$), т.е. $n=11k+7$ при любых целых k. Воспользуемся алгоритмом Евклида, чтобы определить наибольший общий делитель числителя и знаменателя. НОД($10n+7, 4n+5$)=НОД($4n+5, 2n-3$)=НОД($2n-3, 11$), т.е. ($2n-3$)М11. Тогда $2n \equiv 3 \equiv 14 \pmod{11}$, откуда $n \equiv 7 \pmod{11}$.)**

2. Две стороны треугольника равны 2 и 3. Какую длину должна иметь третья сторона, чтобы самый большой угол треугольника был как можно меньше? **(3. В случае равнобедренного треугольника со сторонами 2, 3, 3, два наибольших угла будут равны между собой, а в любом другом случае угол либо напротив стороны длины 3, либо напротив третьей стороны (если она окажется больше 3) будет еще больше, что следует из движения стороны длины 3 относительно стороны длины 2.)**



3. За круглым столом сидят $N \geq 6$ человек. При каких N они могут пересесть так, что любые два прежних соседа теперь будут сидеть через два человека? **(При N, не делящемся на 3. Если принять каждого человека за вершину графа, а ребром соединять вершины – бывшие соседи, то должен образоваться один цикл, который был вначале. Но при новой посадке людей вершины идут через две, значит, длина цикла должна быть взаимно проста с 3.)**

4. Сколько существует способов переложить кубики в пирамидке так, что бы форма осталась такой же, но каждый кубик соприкасался только с новыми кубиками? **(18. В центр можно поставить только одно из 3 угловых чисел (1, 7, 10) – 3 варианта, цифру 5 можно поставить только в угол - 3 варианта, тогда рядом с 5 можно поставить только два оставшихся угловых числа – 2 варианта. После этого перебор показывает, что остальные числа расставляются однозначно (на рисунке показан вариант, который возникает при постановке в центр 1). В силу симметрии расстановки чисел и с учётом поворотов получаем по правилу произведения в комбинаторике 3·3·2=18 вариантов.)**



5. Сумма девяти натуральных чисел равна 1001. Найдите максимальное возможное значение их (всех девяти!) наибольшего общего делителя. **(91,**

например, для набора из восьми чисел 91 и одного числа 273. НОД данной девятки чисел должен быть делителем их суммы, не превосходящим её девятой части, но 1001=7·11·13, значит, НОД≤7·13=91.)

6. В некоторой компании 100 акционеров, причём любые 66 из них владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер? **(<u>25%</u>. Пусть *X* – акционер, владеющий наибольшим процентом акций (*x*%). Разобьём остальных 99 акционеров на три группы *A*, *B* и *C* по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно *a*, *b*, и *c* процентами акций. Тогда 2(100–*x*) = 2(*a*+*b*+*c*) = (*a*+*b*)+(*b*+*c*)+(*c*+*a*) ≥ 50+50+50, т.е. *x*≤25. Приведём соответствующий пример распределения акций. Если каждый из 99 акционеров, кроме *X*, владеет 75/99 % акций, то любые 66 из них без *X* владеют ровно 50%, а любые 66, включая *X*, владеют более 50%, при этом у *X* – ровно 25% акций.)**

7. Два игрока сыграли матч из 40 партий, в котором за победу в партии начислялось 4 очка, за ничью – 2 очка и за поражение – 1 очко. При этом вместе они набрали 170 очков. Какое наибольшее количество очков мог набрать победитель матча? **(<u>100 очков</u>. Каждая ничья в сумме приносит 4 очка, что на 1 очко меньше, чем приносит в сумме победа одного из игроков. Значит, из возможных 40·5=200 очков игроки не добрали 30 очков, т.е. было 30 ничьих. Тогда победитель мог набрать максимум 10·4+30·2=100 очков за 10 побед и 30 ничьих.)**

8. Доску 9×9 замостили 20 плитками 1×4 без наложений. Сколько различных положений могла иметь непокрытая клетка? **(<u>9 положений</u>. Раскрасив доску в четыре цвета по диагоналям в двух направлениях (рис.1 и рис.2), получим, что свободная клетка должна быть одновременно цвета 1 и цвета 5, а таких клеток на доске 13 штук. При этом пример для каждой из 9 клеток на краю и в центре можно построить, выделив на доске 2 прямоугольника 4×9 и полосу 1×9, оставив в ней свободной нужную нам клетку (см. рис.3). А для оставшихся 4 клеток докажем, что они свободными быть не могут. Применим раскраску, как на рис.4, в ней будет 49 белых и 32**

1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1
2	3	4	1	2	3	4	1	2
3	4	1	2	3	4	1	2	3
4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	2	3	4	1	2	3	4	1

рис.1

5	8	7	6	5	8	7	6	5
6	5	8	7	6	5	8	7	6
7	6	5	8	7	6	5	8	7
8	7	6	5	8	7	6	5	8
5	8	7	6	5	8	7	6	5
6	5	8	7	6	5	8	7	6
7	6	5	8	7	6	5	8	7
8	7	6	5	8	7	6	5	8
5	8	7	6	5	8	7	6	5

рис.2

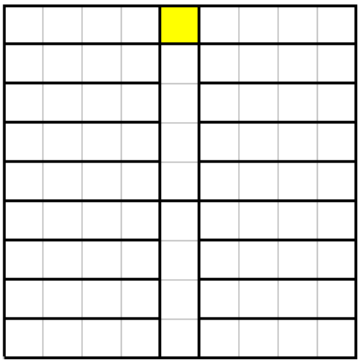


рис.3

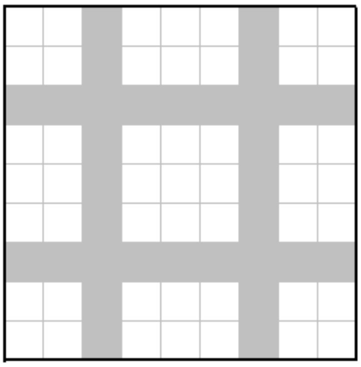


рис.4

чёрных клетки. При этом каждая фигурка 1×4 содержит в себе либо 3, либо 0 белых клеток, т.е. в сумме во всех фигурках будет кратное 3 количество белых клеток, т.е. не все 49. Значит, свободной может быть только белая клетка, к которым и относятся рассмотренные выше 9 клеток.)

9. Между цифрами числителя и знаменателя дроби 27/72 вписали одно и то же пятизначное число. Оказалось, что новая дробь равна исходной. Какое число могло быть вписанным? **(99999. Пусть вписали число $n=\overline{abcde}$, тогда получим уравнение $\frac{27}{72}=\frac{\overline{2abcde7}}{\overline{7abcde2}}$, т.е. $\frac{3}{8}=\frac{2000007+10n}{7000002+10n}$ откуда найдём n=99999.)**

10. В клетках квадратной таблицы 10×10 стоят ненулевые цифры. В каждой строке и в каждом столбце из всех стоящих там цифр составлено 10-значное число (в строках число читается слева направо, в столбцах – сверху вниз). Сколько среди получившихся 20 чисел могло оказаться чисел, делящихся на 3? **(Любое целое число от 0 до 20, кроме 19. Как известно, число делится на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма его цифр. Покажем, что ровно 19 чисел, делящихся на 3 (будем называть их *хорошими* числами), получиться не могло. В этом случае у нас получится 10 хороших сумм одного направления (по строкам или столбцам) и 9 хороших сумм другого направления, т.е. вся сумма чисел будет одновременно кратной 3 и не кратной 3. Для всех остальных случаев существуют варианты расстановки цифр. Начнём с варианта в 20 хороших чисел, когда во всех клетках таблицы стоят 3. Потом станем по очереди заменять 3 на 1, при этом на первом шаге у нас станет сразу на 2 хороших числа меньше, а на каждом следующем – на 1. В таблице указан порядок клеток, в которых мы будем заменять 3 на 1.)**

1									
2	3								
	4	5							
		6	7						
			8	9					
				10	11				
					12	13			
						14	15		
							16	17	
								18	19

11. На берегу реки огорожено забором место с трёх сторон в форме прямоугольника. Длина всего забора – 10 км. Какую наибольшую площадь может иметь этот участок? **(12,5 км². Пусть два равных участка забора равны X км, тогда третий участок равен (10−2X) км, а площадь равна $X(10-2X)=-2(X^2-5X+6,25)+12,5=-2(X-2,5)^2+12,5\le 12,5$ (км²). При этом значение 12,5 достигается при X=2,5.)**

12. В ряд выписаны n попарно различных натуральных чисел так, что произведение любых двух соседних чисел является полным квадратом. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих чисел? **(n^2. Рассмотрим разложение каждого из этих чисел на простые множители. Т.к. в разложение квадрата каждый простой делитель входит в чётной**

степени, то если у какого-нибудь из чисел некоторый простой делитель *p* входит в разложение в нечётной степени, тогда он и в разложения соседних чисел (а значит, и в разложения остальных чисел) входит в нечётной степени. Тогда поделим все эти числа на *p* и получим набор из меньших чисел, который тоже удовлетворяет условию задачи. Продолжив эту операцию, через некоторое время получим набор, в котором каждое простое число в разложениях всегда будет в чётных степенях. Значит, в нужном нам наборе все числа будут различными точными квадратами и тогда наибольшее из этих чисел не меньше n^2. В качестве примера возьмём ряд 1, 2^2, 3^2, …, n^2.)

13. Запишем число 1/31 в виде бесконечной десятичной дроби, и зачеркнём в нём первую ненулевую цифру после запятой. Во сколько раз уменьшится или увеличится число после этой операции? **(<u>Увеличится в 0,7 раз (т.е., уменьшится в 10/7 раз)</u>. Деление уголком показывает, что 1/31 = 0,03…. Тогда вычеркивание второй цифры после запятой в числе 1/31 есть вычитание из него 3/100 и умножение полученного результата на 10. Следовательно, получится число *a*=10(1/31–3/100) = 7/310 = 0,7×1/31.)**

14. Покрышки на передних колёсах автомобиля стираются через 25000 км пробега, а на задних – через 15000 км пробега. Через сколько километров пробега надо поменять местами покрышки передних и задних колес, чтобы автомобиль прошёл с одними и теми же покрышками наибольшее возможное расстояние? (*Колёса стираются прямо пропорционально пройденному расстоянию.*) **(<u>9375 км</u>. Пусть до смены колёс автомобиль проехал *x* тысяч километров, а после смены колёс – y тысяч километров, тогда, если посчитать доли стирания колёс для максимального пробега, получим систему** $\begin{cases} \frac{x}{25}+\frac{y}{15}=1, \\ \frac{x}{15}+\frac{y}{25}=1 \end{cases}$**, из которой сначала найдём, что *x*=*y*, а затем, что *x*=9,375.)**

15. На клетчатой бумаге нарисовали прямоугольник по линиям сетки. Внутри него оказалось единичных отрезков сетки на 90 больше, чем узлов. Какие размеры могут быть у этого прямоугольника? **(<u>7×13 и 1×91</u>. Если прямоугольник имел размеры *a*×*b*, то узлов будет (*a*–1)×(*b*–1), а единичных отрезков – *a*(*b*–1)+*b*(*a*–1), тогда возникает уравнение (*a*–1)×(*b*–1)+90=*a*(*b*–1)+*b*(*a*–1), откуда *ab*=91.)**

16. Найдите наименьшее натуральное число из различных цифр, у которого сохранится множество простых делителей после того, как в его десятичной записи поменяют местами любые две ненулевые цифры. **(<u>180</u>, что можно получить перебором чисел)**