

Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Первый тур. Премьер-лига. 20 сентября 2008 г.

1. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке K . На ее боковых сторонах AD и BC , как на диаметрах, построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q . Докажите, что точки K , P и Q лежат на одной прямой.

2. Приемник работает, если в него вставлены две заряженные батарейки. У нас в запасе 10 батареек, из которых 5 заряжены и 5 разряжены, но какие именно заряжены – неизвестно. Можно попытаться включить приемник, вставив в него какие-нибудь две батарейки. Какого наименьшего количества попыток заведомо хватит, чтобы приемник заработал?

3. На доске написаны следующие n равенств:

$$\begin{aligned} * + * &= * \\ * + * + * &= * \\ &\vdots \\ \underbrace{* + * + \dots + *}_{n+1} &= * \end{aligned}$$




Знайка и Незнайка по очереди вписывают числа вместо звёздочек. Начинает Знайка. За каждое правильное равенство Незнайка получает от Знайки конфету, а за каждое неправильное – щелчок по лбу. Сколько конфет и щелчков получит Незнайка при правильной игре? (Естественно, Незнайка хочет получить как можно больше конфет, а Знайка – дать как можно больше щелчков.) Ответ дать в зависимости от числа n .

4. Маршрутное такси называется забитым, если в нем больше 11 пассажиров. Пассажир озабочен, если он вместе со своими вещами занимает не более $1/5$ всего пространства салона. Четверть всех маршруток в городе забиты. Докажите, что не менее трети всех пассажиров озабочены.

5. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC . Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D . Известно, что $OD = BD = BC/3$. Какими могут быть углы треугольника ABC ?

6. Все целые числа раскрашены в четыре цвета. Пусть x и y – различные нечетные натуральные числа. Докажите, что существуют два целых числа одного цвета, разность которых равна одному из чисел x , y , $x + y$, $x - y$.

7. Решите уравнение $[2x] + [3x] + [5x] = 2008$.

8. Прямоугольник 2007×2008 разрезан на фигурки видов ,  и . Какое наибольшее количество фигурок может быть в разрезании?