

Третий Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 19-25.09.2008

Второй тур. Гранд-лига. 21 сентября 2008 г.

1. n и k – натуральные числа, $n/2 < k \leq 2n/3$. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске $n \times n$ так, чтобы ни в какой строке и ни в каком столбце не нашлось k отмеченных клеток подряд?

2. Вася и Петя нарисовали по выпуклому четырехугольнику. Каждый из них записал на листочке длины всех сторон своего четырехугольника и двух его диагоналей. В результате на их листочках оказались два одинаковых набора из 6 различных чисел. Могут ли четырехугольники Васи и Пети быть различны?

3. Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $bc + ad = ac + 2bd = 1$. Докажите, что $a^2 + c^2 = 2b^2 + 2d^2$.

4. Функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$f(x^2 + x + 3) + 2f(x^2 - 3x + 5) = 6x^2 - 10x + 17$$

при всех вещественных x . Найдите $f(85)$.

5. Биссектрисы углов A, B, C остроугольного треугольника ABC вторично пересекают его описанную окружность в точках K, L, M соответственно. На стороне AB выбрана произвольная точка R . Точки P и Q выбраны так, что $RP \parallel AK, BP \perp BL, RQ \parallel BL, AQ \perp AK$. Докажите, что прямые KP, LQ, MR пересекаются в одной точке.

6. Все точки окружности раскрашены в белый и голубой цвета так, что у каждого вписанного в окружность равностороннего треугольника не менее двух белых вершин. Докажите, что в окружность можно вписать квадрат, у которого не менее трех белых вершин.

7. Верно ли, что для каждого приведенного квадратного трехчлена $f(x)$ существует x такое, для которого числа $f(x), f(f(x))$ и $f(f(f(x)))$ – стороны треугольника?

8. Найдите все вещественные α , обладающие следующим свойством: для каждого натурального n существует целое m такое, что

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{3n}.$$

9. В математическом кружке занимается 21 ученик, некоторые из которых дружат между собой. Известно, что ребята, имеющие одинаковое число друзей, не дружат между собой, а имеющие разное число друзей – дружат. Докажите, что из кружка нельзя выбрать две непересекающиеся команды по 6 человек так, чтобы в одной все школьники дружили, а в другой все школьники не дружили между собой.

10. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон BC, CA и AB в точках D, E и F соответственно. Точка X внутри треугольника ABC такова, что вписанная окружность треугольника XBC тоже касается стороны BC в точке D . Y и Z – точки касания вписанной окружности треугольника XBC со сторонами CX и XB соответственно. Докажите, что четырехугольник $EFZY$ – вписанный.