

Вычисление некоторых конечных сумм

Сегодня мы займемся вычислением различных числовых сумм, или, как принято говорить в математике, суммированием конечных числовых рядов. Думаю, что какая-то часть того, что я собираюсь рассказать, некоторым из вас известна, но надеюсь, что каждый увидит и услышит что-то новое.

I. Для начала рассмотрим примеры на вычисление сумм некоторых дробных выражений. Помимо того, что они интересны сами по себе, при их разборе мы познакомимся с некоторыми приемами, которые пригодятся в дальнейшем.

Пример 1. Вычислите сумму: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{999 \cdot 1000}$.

Понятно, что приводить дроби к общему знаменателю – трудоемко и бесполезно. Заметим, что не случайно знаменатели всех членов ряда заданы в виде произведений двух соседних натуральных чисел. При каких операциях с дробями нам приходится перемножать знаменатели? Чаше всего, при выполнении сложения или вычитания дробей. Так как числитель каждой дроби равен 1, то вряд ли мы сможем получить такую дробь путем сложения дробей, а вот вычитание дробей может привести к успеху. Действительно, обозначим искомую сумму S , тогда:

$$S = \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1000-999}{999 \cdot 1000} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{999} - \frac{1}{1000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}.$$

Другими словами, мы вывели следующее соотношение:

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = \frac{(n+1)}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ которым и воспользовались.}$$

Обратите внимание, что, в данном случае, n – натуральное число, но полученное равенство $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ справедливо для любых дробных выражений, знаменатель которых отличен от нуля!

Пример 2. Вычислите сумму: $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100 \cdot 101}$.

Ситуация похожая, поэтому имеет смысл попробовать сходный метод, то есть попытаться получить некоторое представление дроби, знаменатель которой является произведением трех последовательных натуральных чисел, в виде разности двух других дробей. Можно попробовать несколько вариантов, пока не возникнет естественная гипотеза:

$$\text{гипотеза: } \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}.$$

Проверим ее, выполнив вычитание в правой части равенства. Увидим, что наша гипотеза неверна, но полученный результат сразу позволит ее скорректировать.

$$\text{Оказывается, что выполняется равенство: } \frac{1}{(n-1)n(n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

Обозначим искомую сумму S и воспользуемся полученным соотношением:

$$S = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{99 \cdot 100} - \frac{1}{100 \cdot 101} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{100 \cdot 101} \right) = \frac{10101 - 2}{2 \cdot 2 \cdot 10101} = \frac{10099}{40404}.$$

Пример 3. Вычислите сумму: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2006}{2007!} + \frac{2007}{2008!}$. (Напомним, что для любого натурального n его факториал – это произведение всех натуральных чисел от 1 до n , то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.)

Сразу понятно, что прием, использованный уже дважды, здесь не поможет. При суммировании такого ряда чисел «срабатывает» другой метод, с которым мы еще встретимся в дальнейшем. Обозначим искомую сумму S и прибавим к ней дробь $\frac{1}{2008!}$, причем сложение начнем выполнять с конца. Последовательно получим:

$$\frac{1}{2008!} + \frac{2007}{2008!} = \frac{2008}{2008!} = \frac{1}{2007!}$$

$$\frac{1}{2007!} + \frac{2006}{2007!} = \frac{2007}{2007!} = \frac{1}{2006!}$$

$$\frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} = \frac{2}{2!} = 1$$

Таким образом, $S + \frac{1}{2008!} = 1$, то есть $S = 1 - \frac{1}{2008!}$.

Использованное нами соотношение в общем виде выглядит так:
 $\frac{1}{n!} + \frac{n-1}{n!} = \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$. Отметим также, что исходное задание можно было сформулировать иначе: «Докажите, что сумма такого ряда меньше 1».

Пример 4. Вычислите сумму: $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$.

Вычисление таких сумм, по-видимому, знакомо многим школьникам 8 – 9 классов, но без этого примера «картина» будет явно не полной.

В таких случаях выручает основное свойство дроби: можно умножить числитель и знаменатель каждого слагаемого на одно и то же число, отличное от нуля, а именно, на число, сопряженное знаменателю. Другими словами, можно использовать соотношение:

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}}{(\sqrt{a} + \sqrt{a+1})(\sqrt{a} - \sqrt{a+1})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{a+1})^2} = -(\sqrt{a} - \sqrt{a+1}) = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}.$$

Тогда, искомая сумма S равна:

$$S = (-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \dots + (-\sqrt{99} + \sqrt{100}) = -1 + 10 = 9.$$

Отметим, что и в этом случае задание можно сформулировать в виде неравенства, попутно обобщив его, например, так: «Докажите, что для любого натурального n выполняется неравенство $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} < \sqrt{n+1}$ ».

В заключение первой части следует сказать, что при вычислении многих сумм можно поступать совсем по-другому. А именно, рассматривая частные случаи, пытаться угадать результат для случая n слагаемых, а затем доказывать полученную гипотезу, пользуясь методом математической индукции. Но это, как принято говорить, «совсем другая история».

Для закрепления прочитанного полезно самостоятельно выполнить несколько упражнений.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. Вычислите суммы: а) $\frac{1}{1 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 101}$; б) $\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 98 \cdot 100}$;

в) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + 2008 \cdot 2008!$; г) $\frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10199}+\sqrt{10201}}$.

2*. Обобщите полученные результаты, составив и доказав соответствующие тождества.

II. Наверняка вы уже много раз сталкивались с задачей суммирования ряда первых n натуральных чисел. Решение этой задачи найдено еще на клинописных табличках

древнего Вавилона. Широко известна также история о том, как десятилетний Карл Фридрих Гаусс мгновенно нашел сумму первых ста натуральных чисел. Позволю себе напомнить это для того, чтобы зафиксировать несложный, но очень важный прием, который нам потребуется.

Гаусс действовал так: $1 + 2 + \dots + 99 + 100 = (1 + 100) \cdot 50 = 5050$, но это удобно только в том случае, когда количество слагаемых четно. А если мы не знаем, четно оно или нет? Тогда ту же идею удобно использовать иначе.

Пример 5. Найдите сумму первых n натуральных чисел.

Пусть $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = S$, тогда $n + (n - 1) + \dots + 2 + 1 = S$.

Складывая почленно, получим: $2S = (n + 1)n$, значит, $S = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Эту же идею можно продемонстрировать наглядно - геометрически. Искомая сумма представляет собой площадь «ступенчатой» фигуры из n строк и n столбцов, нарисованной по линиям сетки на клетчатом листе бумаги (см. рис. 1а). Взяв две равные фигуры и составив из них прямоугольник размером $n \times (n + 1)$, легко вычисляем площадь одной фигуры (см. рис. 1б).

Существует и простая комбинаторная иллюстрация найденного тождества $1 + 2 + \dots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2}$.

Пусть $(n + 1)$ шахматистов играют турнир в один круг (каждый встречается с каждым по одному разу). Тогда общее количество сыгранных партий можно подсчитать двумя способами. С одной стороны, первый сыграл n партий, второй (не считая партии с первым) сыграл $(n - 1)$ партию, третий – $(n - 2)$ партии, и так далее, предпоследний сыграл одну партию (с последним), а все партии последнего участника уже подсчитаны. С другой стороны, каждый шахматист сыграл n партий, всего шахматистов – $(n + 1)$, тогда произведение $n(n + 1)$ дает нам общее количество партий, при условии, что каждую партию мы учли два раза.

Указанным образом можно находить суммы первых n членов любой **последовательности**, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Такие последовательности называются **арифметическими прогрессиями** и изучаются в курсе алгебры 9 класса.

Нам потребуется еще одна такая сумма.

Пример 6. Найдите сумму первых n нечетных чисел.

Действуя аналогично примеру 5, получим: $S = 1 + 3 + \dots + (2n - 3) + (2n - 1)$, тогда $2S = (2n - 1 + 1)n = 2n^2$, следовательно, $S = n^2$.

Геометрический смысл суммы ряда первых нечетных чисел был хорошо известен еще в древней Индии и Вавилоне. Там для строительства использовались квадратные плиты. Добавляя каждый раз «уголок», составленный из нечетного количества плит, можно было получить квадратную плиту большего размера (см. рис. 2).

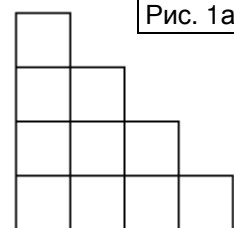


Рис. 1а

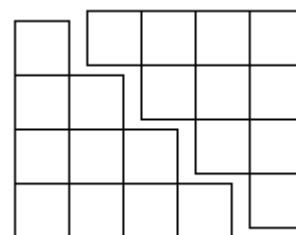


Рис. 1б

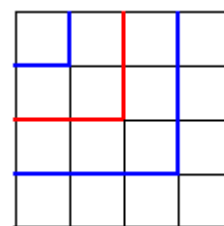


Рис. 2

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

- Найдите сумму первых n натуральных чисел, дающих остаток 2 при делении на 5.
- Вычислите: $2^2 - 4^2 + 6^2 - 8^2 + \dots + 98^2 - 100^2$.
- Найдите сумму всех различных трехзначных чисел, составленных только из нечетных цифр.
- * Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 7, заключенных между натуральными числами k и n ($k < n$).
- Докажите, что любой квадрат можно разбить на n квадратов, где n – любое натуральное число, большее пяти.

Теперь вычислим одну из «степенных» сумм.

Пример 7. Найдите сумму $S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$.

Первый способ. Воспользуемся одним из уже знакомых методов. Прибавим еще 1 к искомой сумме. Последовательно получим: $1 + 1 = 2$; $2 + 2 = 4 = 2^2$; $2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$; ...; $2^{63} + 2^{63} = 2^{64}$. Таким образом, $S + 1 = 2^{64}$, то есть $S = 2^{64} - 1$.

Мы использовали простое соотношение: $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$.

Второй способ. Умножим обе части данного равенства на 2. Получим:

$2S = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} + 2^{64}$. Таким образом, $2S = (S - 1) + 2^{64}$, откуда $S = 2^{64} - 1$.

Широко известно, что эта задача связана с легендой о происхождении шахмат, а именно, с той наградой, которую попросил мудрец, придумавший эту игру, у древнеиндийского царя, которому она очень понравилась. Мудрец попросил наградить его пшеничными зернами так, чтобы выполнялось следующее условие: на первую клетку шахматной доски положить одно зерно, на вторую – в два раза больше, на третью – еще в два раза больше, и таким образом заполнить зернами всю шахматную доску.

Поскольку на шахматной доске 64 клетки, то мы с вами подсчитали, сколько зерен хотел получить мудрец, и видим, что число это очень большое. Царю вначале показалось, что требуемая плата совсем ничтожна, а, на самом деле такого количества зерен не было на земном шаре!

Второй способ решения этой задачи можно обобщить для вычисления суммы первых n членов любой **последовательности**, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, отличное от нуля и единицы. Такие последовательности называются **геометрическими прогрессиями** и также изучаются в курсе алгебры 9 класса.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

8. Найдите сумму: $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$.

9. Разложите на множители: а) $x^n - 1$; б) $x^{2k+1} + 1$ (n и k – натуральные числа, $n > 1$).

10. Вычислите: $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 50 \cdot 2^{49}$.

11. Найдите сумму: $1 + 11 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ единиц}}$.

III. Математики древности придавали большое значение так называемым **фигурным числам** и много занимались их изучением. Простейшими фигурными числами являются **квадратные числа** 1, 4, 9 и так далее, то есть числа, являющиеся квадратами натуральных. Возникает естественный вопрос: а как найти сумму ряда первых n квадратных чисел?

Пример 8. Найдите сумму $S = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$.

Существует несколько способов ее решения и один из самых красивых принадлежит Архимеду. Он использовал хорошо известную формулу куба суммы двух чисел:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Вслед за Архимедом

выпишем и почленно сложим:

$$2^3 = (1 + 1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1^3$$

$$3^3 = (2 + 1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1^3$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1^3$$

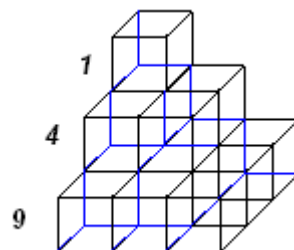


Рис. 3а

$$2^3 + 3^3 + \dots + (n + 1)^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + 3S + 3(1 + 2 + \dots + n) + n.$$

Уничтожим одинаковые слагаемые в левой и правой части и используем равенство $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Тогда: $3S = (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{(n+1)(2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$. Таким образом, искомая сумма $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

И эта задача имеет простую геометрическую интерпретацию.

Представьте себе «угловую лестницу», сложенную из кубических плит (см. рис. 3а). Полученное число – количество использованных «кубиков».

Более того, искомую сумму можно вычислить и «геометрически». Для этого достаточно взять три одинаковые «лестницы», у каждой из которых n^2 кубиков в основании, расположить их так, как показано на рис. 3б, и сложить из них фигуру, показанную на рис. 3в. Тогда, из двух таких фигур легко складывается прямоугольный параллелепипед размером $n \times (n+1) \times (2n+1)$.

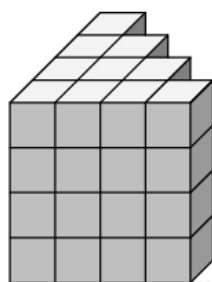


Рис. 3б

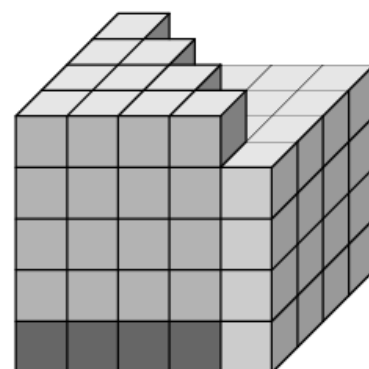
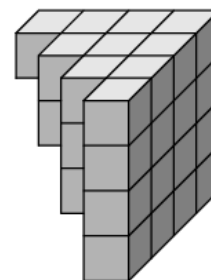
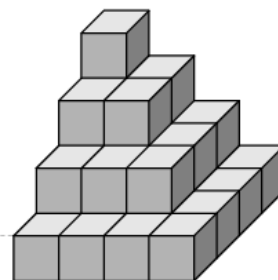


Рис. 3в

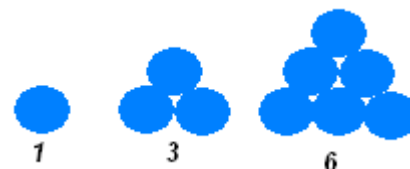
Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

12. Докажите, что любое число вида $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ является целым (не используя, что оно получено как сумма целых чисел).

13. Вычислите: $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$.

14. Найдите сумму: $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2$.

Рис. 4а



Еще один вид простых фигурных чисел – **треугольные числа**, которые легче всего представить себе, выкладывая одинаковые круги в виде равносторонних треугольников подобно тому, как это делается с шарами на бильярдном столе (см. рис. 4а). Какими будут два следующих треугольных числа? Естественно, 10 и 15.

Какой вид имеет треугольное число с номером n ? Это число равно сумме n первых натуральных чисел, поэтому $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Пример 9. Найдите сумму первых n треугольных чисел.

$$\text{Пусть } S = 1 + 3 + \dots + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Заметим, что сумма любых двух соседних треугольных чисел является квадратом натурального числа. Действительно, $\frac{(k-1)k}{2} + \frac{k(k+1)}{2} = k^2$. (Здесь также возможна геометрическая иллюстрация: сложив две такие ступенчатые фигуры, получим квадрат со стороной k). Используем этот факт для суммирования. Запишем искомую сумму еще раз, отправив первое слагаемое «в хвост»:

$$S = 3 + 6 + \dots + \frac{n(n+1)}{2} + 1. \text{ Сложим два записанных равенства почленно:}$$

$2S = (1 + 3) + (3 + 6) + \dots + \left(\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{n(n+1)}{2} + 1$. Каждая из записанных скобок представляет собой сумму двух последовательных треугольных чисел. По доказанному:
 $2S = 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + \frac{n(n+1)}{2} + 1 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{2n(n+1)(n+2)}{6}$. Следовательно, $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

Отметим, что в этом случае сразу видно, что полученное выражение принимает только натуральные значения. Действительно, из трех последовательных натуральных чисел ровно одно делится на 3, и хотя бы одно является четным, поэтому числитель полученной дроби делится на 6.

Очень интересна геометрическая интерпретация решенной задачи. Решенную нами задачу можно было сформулировать, например, в таком виде.

Перед входом в крепость сложена треугольная пирамида из одинаковых пушечных ядер (в основании пирамиды – равносторонний треугольник, ядра последующего слоя лежат в ямках предыдущего слоя, см. рис. 4б). Каким может быть количество ядер в такой пирамиде?

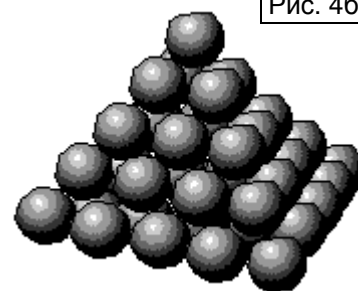


Рис. 4б

Полученный ответ $P_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ дает нам общую

формулу нового вида **фигурных чисел**, которые называются **пирамидальными**.

Кроме **квадратных** и **треугольных** чисел, древние математики рассматривали и другие **фигурные** числа, связанные с правильными многоугольниками. На рисунке 5 показаны, например, три первых **пятиугольных** числа.

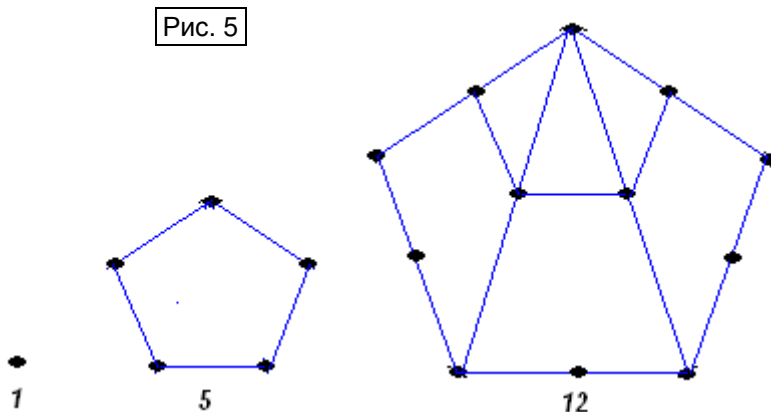


Рис. 5

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

15. Найдите сумму четырех последовательных треугольных чисел, начиная с n -го.

16. Найдите сумму n первых пятиугольных чисел.

17*. А) Выведите формулу n -го по порядку k -угольного числа.

Б) Найдите сумму первых n k -угольных чисел.

А теперь попробуем просуммировать кубы натуральных чисел («кубические числа»).

Пример 10. Найдите сумму $S = 1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3$.

Заметим, что $1^3 = 1$; $2^3 = 8 = 3 + 5$; $3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$. Возникает гипотеза, что число k^3 является суммой ряда, состоящего из k последовательных нечетных чисел. Докажем ее. Сгруппируем последовательные нечетные числа следующим образом: 1; (3; 5); (7; 9; 11); (13; 15; 17; 19); ... и найдем сумму чисел в k -ой группе.

Эта группа будет содержать k чисел. Количество предшествующих нечетных чисел равно: $1 + 2 + \dots + (k-1) = \frac{k(k-1)}{2}$. Прибавив еще k чисел, получим $\frac{k(k-1)}{2} + k =$

$\frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$. Следовательно, искомую сумму S_k можно найти следующим

образом: от суммы первых $\frac{k(k+1)}{2}$ нечетных чисел отнять сумму первых $\frac{k(k-1)}{2}$

нечетных чисел. Таким образом, используя уже доказанную формулу, получим:

$$S_k = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 - \left(\frac{k(k-1)}{2} \right)^2 = \frac{k^2}{4} ((k+1) + (k-1))((k+1) - (k-1)) = \frac{k^2}{4} \cdot 2k \cdot 2 = k^3.$$

Следовательно, искомая сумма S равна сумме первых $\frac{n(n+1)}{2}$ нечетных чисел, то есть $S = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Сравнивая полученный результат с суммой первых n натуральных чисел, можно заметить поразительный факт: $1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = (1 + 2 + \dots + (n-1) + n)^2$!

Отметим, что в первой части доказательства мы фактически использовали метод математической индукции: убедились в справедливости нашей гипотезы для нескольких первых слагаемых, а затем доказали ее для слагаемого с номером k , исходя из предположения, что она верна для слагаемого с номером $k-1$.

В заключение отметим, что рассмотренные методы и приемы могут пригодиться не только для вычисления других конечных сумм, но и для вычисления бесконечных сумм. Но вычисление бесконечных сумм – это «совсем другая история» ...

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

18. Придумайте геометрическую интерпретацию суммирования кубов натуральных чисел.

19. Найдите сумму: $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + n(n+1)^2$.

Литература

1. Н.Б. Алфутова, А.В. Устинов. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. – М.: МЦНМО, 2002.
2. М.Л. Галицкий, А.М. Гольдман, Л.И. Звавич. Сборник задач по алгебре для 8 – 9 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: «Просвещение», 1992.
3. Диофант Александрийский. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М., «Наука», 1974.
4. А.П. Карп. Алгебра. Сборник задач для 8 – 9 классов средней школы. – С-Пб.: СММО ПРЕСС, 2000.
5. Д.В. Клименченко. Задачи по математике для любознательных. Книга для учащихся 5 – 6 классов средней школы. – М.: «Просвещение», 1992.
6. Московские математические регаты. Составители – А.Д. Блинков, Е.С. Горская, В.М. Гуровиц. – М.: МЦНМО, 2007.
7. Л.Ф. Пичугин. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7 – 9 классов средней школы. – М.: «Просвещение», 1990.
8. Д.Я. Стройк. Краткий очерк истории математики. – М., «Наука», 1990.

Ответы, указания, решения.

1. а) Ответ: $\frac{20}{101}$; **б) Ответ:** $\frac{153}{4900}$; **в) Ответ:** $2009! - 1$. Указание. Каждое слагаемое можно представить в виде разности: $k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)k! - k!$ **г) Ответ:** 50.

2. а) например, $\frac{1}{1 \cdot (1+d)} + \frac{1}{(1+d) \cdot (1+2d)} + \dots + \frac{1}{(1+(n-1)d) \cdot (1+nd)} = \frac{n}{1+nd}$, где n – натуральное число; **в других терминах:** если (a_n) – арифметическая прогрессия, не содержащая нулевых членов, то $\frac{1}{a_1 \cdot a_2} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n} = \frac{n-1}{a_1 \cdot a_n}$; **б)** например,

$$\frac{1}{(a-d) \cdot a \cdot (a+d)} + \frac{1}{a \cdot (a+d) \cdot (a+2d)} + \dots + \frac{1}{(a+(n-1)d) \cdot (a+nd) \cdot (a+(n+1)d)} =$$

$= \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{(a-d) \cdot a} - \frac{1}{(a+nd) \cdot (a+(n+1)d)} \right)$; в других терминах: если (a_n) – арифметическая прогрессия, не содержащая нулевых членов с разностью $d \neq 0$, то $\frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3} + \frac{1}{a_2 \cdot a_3 \cdot a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{2d} \left(\frac{1}{a_1 \cdot a_2} - \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} \right)$; в) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$; г) например, если $a > 0$, $d > 0$, то $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+d}} + \frac{1}{\sqrt{a+d} + \sqrt{a+2d}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a+(n-1)d} + \sqrt{a+nd}} = \frac{n}{\sqrt{a} + \sqrt{a+nd}}$; в других терминах: если (a_n) – арифметическая прогрессия с положительными членами, то $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$.

3. Ответ: $\frac{n(5n-1)}{2}$. Указание. $S = 2 + 7 + \dots + (5n-3)$.

4. Ответ: -5100 . Указание. Искомая сумма равна: $(2-4)(2+4) + (6-8)(6+8) + \dots + (98-100)(98+100) = -2(2+4+6+8+\dots+98+100)$.

5. Ответ: 69375. Решение. Найдем сумму первых пяти указанных чисел: $111 + 113 + \dots + 119 = \frac{(111+119)5}{2} = 575$. В следующей сумме $131 + 133 + \dots + 139$ пяти указанных чисел, каждое слагаемое на 20 больше, поэтому она больше найденной на 100. Следовательно, сумма чисел, составленных из нечетных цифр и начинающихся с цифры 1, равна $575 + 675 + \dots + 975 = \frac{(575+975)5}{2} = 3875$. В каждой следующей нечетной сотне каждое слагаемое на 200 больше, чем в предыдущей, поэтому сумма в ней на $200 \cdot 25 = 5000$.

Таким образом, искомая сумма равна: $3875 + 8875 + \dots + 23875 = \frac{(3875+23875)5}{2} = 69375$.

6. Ответ: $3(n^2 - k^2)$. Решение. Пусть S_1 – сумма всех дробей (в том числе и сократимых) со знаменателем 7, заключенных между числами k и n (включая эти числа). Тогда $S_1 = k + \frac{7k+1}{7} + \frac{7k+2}{7} + \dots + n = \frac{1}{7}(7k + (7k+1) + \dots + 7n) = \frac{1}{7} \cdot \frac{(7k+7n)(7n-7k+1)}{2} = \frac{(n+k)(7n-7k+1)}{2}$. Так как 7 – простое число, то дробь со знаменателем 7 сократима

тогда и только тогда, когда эта дробь является целым числом. Пусть S_2 – сумма всех целых чисел от k до n (включая их). Тогда $S_2 = k + (k+1) + \dots + (n-1) + n = \frac{(k+n)(n-k+1)}{2}$. Искомая сумма равна $S_1 - S_2 = \frac{(n+k)(6n-6k)}{2} = 3(n+k)(n-k)$.

7. Указание. Используя рис. 2, докажите, что квадрат можно разбить на 6, 7 или 8 квадратов. Затем докажите, что в любом полученном разбиении можно увеличить количество квадратов на 3.

8. Ответ: $\frac{3^n - 1}{2}$.

9. Ответ: а) $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$; б) $x^{2k+1} + 1 = (x+1)(x^{2k} - x^{2k-1} + \dots - x + 1)$. Указание. а) При $x \neq 1$ $1 + x + x^2 + \dots + x^{n-2} + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}$; б) при $x \neq -1$ $1 - x + x^2 - \dots -$

$$x^{2k-1} + x^{2k} = \frac{x^{2k+1} + 1}{x + 1}.$$

10. Ответ: $49 \cdot 2^{50} + 1$. Решение. $1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 50 \cdot 2^{49} = (1 + 2 + \dots + 2^{49}) + (2 + 2^2 + \dots + 2^{49}) + \dots + 2^{49} = (2^{50} - 1) + 2(2^{49} - 1) + \dots + 2^{49}(2 - 1) = 50 \cdot 2^{50} - (1 + 2 + \dots + 2^{49}) = 50 \cdot 2^{50} - (2^{50} - 1) = 49 \cdot 2^{50} + 1$.

11. Ответ: $\frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n - 1)}{9} - n \right)$. Решение. Пусть $S = 1 + 11 + \dots + \underbrace{11\dots1}_{n \text{ единиц}}$, тогда $9S = 9 + 99 + \dots$

$$+ \underbrace{99\dots9}_{n \text{ цифр}} = (10 - 1) + (10^2 - 1) + \dots + (10^n - 1) = \frac{10(10^n - 1)}{9} - n.$$

12. Решение. Докажем, что это число делится на 2 и на 3, откуда и будет следовать его делимость на 6 (так как числа 2 и 3 – взаимно простые). Из двух последовательных натуральных чисел n и $n + 1$ одно является четным, то есть делится на 2. Предположим, что ни одно из них не делится на 3, тогда их остатки при делении на 3 равны 1 и 2 (в каком-то порядке). Следовательно, число $2n + 1 = n + (n + 1)$ при делении на 3 дает остаток 0. Таким образом, один из множителей в числителе данной дроби делится на 3.

13. Ответ: 2. Указание. Числитель данной дроби является разностью двух сумм квадратов: первых четырнадцати и первых девяти натуральных чисел.

14. Ответ: $\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$. Решение. $1^2 + 3^2 + \dots + (2n-1)^2 = (1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2) - (2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2) = (1^2 + 2^2 + \dots + (2n)^2) - 4(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n+1)(4n+1-2n-2)}{3} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}.$

15. Ответ: $2n^2 + 8n + 10$. Указание. Искомая сумма равна $(n+1)^2 + (n+3)^2$.

16. Ответ: $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Указание. Докажите, что пятиугольное число с номером n можно представить в виде суммы его номера и трех треугольных чисел с номером $n-1$, то есть $P_n^5 = n + 3T_{n-1} = n + 3 \frac{(n-1)n}{2}.$

17. Ответ: А) $P_n^k = n + (k-2) \frac{(n-1)n}{2}$. Б) $\frac{n(n+1)}{2} \left(1 + \frac{(k-2)(n-1)}{3} \right).$

19. Ответ: $\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$. Решение. Слагаемое с номером k можно представить так:

$$a_k = k(k+1)^2 = (k+1-1)(k+1)^2 = (k+1)^3 - (k+1)^2. \text{ Тогда искомая сумма равна: } (2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2) = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n+1)^3) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n+1)^2) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(3n^2 + 9n + 6 - 4n - 6)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}.$$