Девятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-27.09.2014

Первый тур. Премьер-лига. 21 сентября 2014 г.

1. Точки O и H – центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Постройте на стороне BC такую точку P, что $\angle AHP = \angle AOP$.

2. Дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$f(xy) + f(y - x) \geqslant f(y + x)$$

для всех действительных x, y. Докажите, что $f(x) \geqslant 0$ для всех действительных x.

3. Тройка натуральных чисел (a, b, c) такова, что все три числа $\frac{b+1}{a-1}$, $\frac{c+1}{b-1}$, $\frac{a+1}{c-1}$ – целые. Найдите наибольшее возможное значение числа abc.

4. В треугольнике ABC на стороне AB и касательной к его описанной окружности в точке A выбраны точки P и Q таким образом, что $AP = AQ = AC$. Докажите, что прямая PQ проходит либо через центр вписанной окружности ABC, либо через центр одной из его вневписанных окружностей.

5. В графе 100 вершин и 200 рёбер. Докажите, что в нём есть два цикла одинаковой длины.

6. Рассмотрим всевозможные графики функций вида $y = kx + b$, где k и b – четырёхзначные числа. Какое наибольшее число таких графиков может пересекаться в одной точке, ни одна из координат которой не является целым числом?

7. Из палок длиной 1 м собран каркас куба. На каркасе сидят 9 пауков, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путём по ребрам куба) не меньше R. При каком наибольшем R это возможно?

8. Можно ли положить на доску 99×99 несколько полосок 1×4 (по клеткам) так, чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же числом полосок?

Девятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-27.09.2014

Первый тур. Премьер-лига. 21 сентября 2014 г.

1. Точки O и H – центр описанной окружности и ортоцентр остроугольного треугольника ABC соответственно. Постройте на стороне BC такую точку P, что $\angle AHP = \angle AOP$.

2. Дана функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$f(xy) + f(y - x) \geqslant f(y + x)$$

для всех действительных x, y. Докажите, что $f(x) \geqslant 0$ для всех действительных x.

3. Тройка натуральных чисел (a, b, c) такова, что все три числа $\frac{b+1}{a-1}$, $\frac{c+1}{b-1}$, $\frac{a+1}{c-1}$ – целые. Найдите наибольшее возможное значение числа abc.

4. В треугольнике ABC на стороне AB и касательной к его описанной окружности в точке A выбраны точки P и Q таким образом, что $AP = AQ = AC$. Докажите, что прямая PQ проходит либо через центр вписанной окружности ABC, либо через центр одной из его вневписанных окружностей.

5. В графе 100 вершин и 200 рёбер. Докажите, что в нём есть два цикла одинаковой длины.

6. Рассмотрим всевозможные графики функций вида $y = kx + b$, где k и b – четырёхзначные числа. Какое наибольшее число таких графиков может пересекаться в одной точке, ни одна из координат которой не является целым числом?

7. Из палок длиной 1 м собран каркас куба. На каркасе сидят 9 пауков, при этом расстояние между любыми двумя (измеряемое кратчайшим путём по ребрам куба) не меньше R. При каком наибольшем R это возможно?

8. Можно ли положить на доску 99×99 несколько полосок 1×4 (по клеткам) так, чтобы каждая клетка была покрыта одним и тем же числом полосок?