Девятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20-27.09.2014

Третий тур. Премьер-лига. 24 сентября 2014 г.

1. Положительные числа x, y, z, a, b, c удовлетворяют условиям

$$cy + bz = a; \quad az + cx = b; \quad bx + ay = c.$$

Найдите минимальное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

2. Последовательность $\{a_n\}$, задана условиями $a_1 = 4$; $a_n = a_{n-1}^2 - a_{n-1}$ при $n > 1$. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел, каждое из которых является делителем хотя бы одного члена этой последовательности.

3. Натуральные числа $a > b$ таковы, что $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a - b)$. Докажите, что число ab является кубом натурального числа.

4. A_1, B_1, C_1 – точки, в которых вписанная окружность касается сторон BC, CA, AB треугольника ABC, а A_2, B_2, C_2 – точки, в которых тех же сторон касаются вневписанные окружности. Докажите, что

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + 2\max(AB, BC, CA) \geqslant AA_2 + BB_2 + CC_2 + 2\min(AB, BC, CA).$$

5. Пусть AD – биссектриса остроугольного треугольника ABC. Точка M на отрезке AB выбрана так, что $\angle MDA = \angle ABC$, а точка N на отрезке AC – так, что $\angle NDA = \angle ACB$. Наконец, обозначим через P точку пересечения прямых MN и AD. Докажите, что $AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$.

6. Какое наибольшее количество ладей может стоять на доске 100×100, если каждая ладья бьёт не более десяти других ладей? (Ладьи бьют друг сквозь друга).

7. В ряд выписано 100 единиц, 100 двоек и 100 троек, причём никакие три одинаковые цифры не стоят подряд. Докажите, что можно выбрать четыре стоящие подряд цифры, среди которых есть единица, двойка и тройка.

8. Выпуклый n-угольник разбит на треугольники диагоналями, не пересекающимися во внутренних точках. Докажите, что можно выбрать хотя бы $n/3$ вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни диагоналями разбиения.