

Девятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20-27.09.2014

Четвёртый тур. Премьер-лига. 25 сентября 2014 г.

1. Найдите все многочлены $f(x)$ с целыми коэффициентами такие, что $f(n)$ и $f(2^n)$ взаимно просты при каждом натуральном n .

2. Для положительных чисел x, y, z , сумма которых равна 1, докажите неравенство

$$\frac{xy}{z+xy} + \frac{yz}{x+yz} + \frac{zx}{y+zx} \leq 1.$$

3. $ABCD$ – вписанный четырёхугольник площади 8. Внутри этого четырёхугольника нашлась такая точка K , что $KA + KB + KC + KD = 8$. Докажите, что $ABCD$ – трапеция.

4. $n > 20$ человек расселись за круглым столом. Потом был перерыв, после которого они расселись за тем же столом в другом порядке. Оказалось, что если между двумя людьми до перерыва сидело меньше 10 человек, то после перерыва между ними сидит не меньше 10 человек. При каком наименьшем n такое могло случиться?

5. Корзина называется *укомплектованной*, если в ней ровно 10 кг риса и ровно 30 яиц. В магазине 100 корзин, в которых суммарно находится 1000 кг риса и 3000 яиц. Работники магазина могут за одну операцию взять две корзины и переложить из одной в другую сколько угодно риса и яиц. Какого наименьшего числа операций заведомо хватит, чтобы сделать все 100 корзин укомплектованными?

6. Для каждого нечётного простого p построена арифметическая прогрессия с первым членом $\frac{p-1}{2}$ и разностью p . Докажите, что в объединении этих прогрессий содержатся все натуральные числа.

7. Точки O и T – центры описанной окружности и окружности девяти точек остроугольного треугольника ABC . Прямая AT пересекает сторону BC в точке P . Описанные окружности треугольников APB и APC пересекают стороны AC и AB в точках E и F соответственно. Отрезки BE и CF пересекаются в точке S . Докажите, что точки P, O, S лежат на одной прямой.

8. В последовательности нулей и единиц разрешается заменять 1 на 010 или, наоборот, 010 на 1, а также 0 на 110 или, наоборот, 110 на 0. Можно ли с помощью таких операций получить из последовательности 00...001 (2014 нулей) последовательность 100...00 (2014 нулей)?