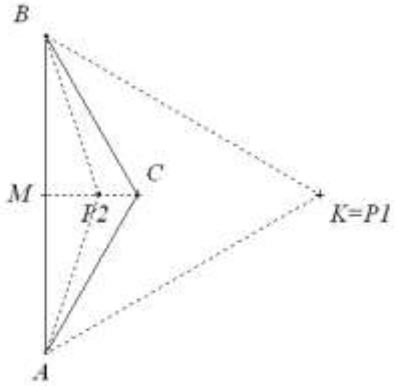
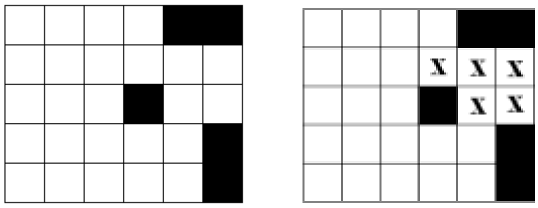
X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VII Турнир математических игр.

1-я игра. «Домино»***. Младшая лига (7-9 классы).*** **Решения**. ***11 сентября 2014 года***

0–0. Найдите в плоскости равнобедренного треугольника ABC с $\angle C=120°$ все положения точки P, удовлетворяющей равенствам $PA+BC = PB+CA = PC+AB$. *Укажите точно хотя бы одно положение и приблизительно остальные.* **(Заметим, что $CA=BC$, значит, $PA=PB$ и точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Рассмотрим равносторонний треугольник ABK, в котором точка C является центром. Тогда первое положение точки P – точка K, т.к. $KA+BC=KB+CA=KC+AB$ в силу равенств $KA=KB=AB$ и $BC=CA=KC$. Второе положение точки P – между C и серединой M стороны AB. Такое положение на отрезке CM будет. В силу симметрии $PA=PB$, $BC=CA$. Кроме того разность сумм $R(P)=(PA+BC)–(PC+AB)$ при движении точки P от C к M непрерывно убывает от положительного значения ($R(C)=(CA+BC)–AB>0$ в силу неравенства треугольника для ΔABC) до отрицательного ($R(M)=(MA+BC)–(MC+AB)=BC–MC–(AB–MA)=$ $=BC–MC–MB<0$ в силу неравенства треугольника для ΔMBC). Значит, в некоторый момент эта разность будет равна 0, что и даст нам нужное второе положение точки P. Нетрудно также с помощью неравенства треугольника показать, что за пределами отрезка MK выполняется неравенство $PC+AB> PA+BC$, внутри отрезка CK выполняется неравенство $PC+AB< PA+BC$.)**



0–1. Из прямоугольника 5×6 вырезали пять клеток (см. рис., вырезанные клетки помечены чёрным цветом) На какое наименьшее число частей можно разрезать получившуюся фигуру, чтобы из них можно было сложить квадрат 5×5? Приведите ответ и пример разрезания. **(<u>2 части</u>. Вырежем зону из 5 клеток, отмеченных крестиками, и повернём её на 90 градусов по часовой стрелке, вставив в образовавшуюся дырку такой же форы, чтобы получить квадрат 5×5.)**

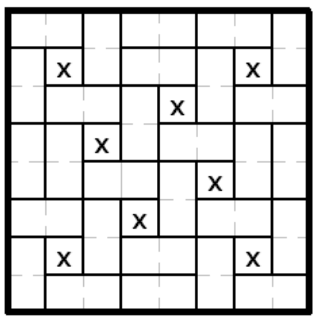


0–2. Постройте график функции $y = x^3(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{x^2-1})$. **(С учётом области определения ($1\le x^2\le 1$ получаем, что <u>график функции будет состоять из двух точек: (1;0) и (–1;0)</u>.)**

0–3. Найдите все натуральные числа N, для которых $N+11$ и $N–78$ – полные квадраты. **(<u>2014</u>. Пусть $N+11=a^2$, $N–78=b^2$, где a и b – натуральные числа. Тогда $89=a^2–b^2=(a–b)(a+b)$, откуда в силу простоты числа 89 и условия $a>b>0$ следует, что $a–b=1$, $a+b=89$. Значит, $a=45$, $b=44$, $N=45^2–11=2014$.)**

0–4. Найдите функцию $f(x)$, если $f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7$. **(<u>$f(x) = x^2 + 5x + 1$</u>. Пусть $t = 2x + 1$, тогда $x=\frac{t-1}{2}$. Следовательно, $f(t)=4\cdot\frac{(t-1)^2}{4}+14\cdot\frac{t-1}{2}+7$ $= (t – 1)^2 + 7(t – 1) + 7 = t^2+5t+1$.)**

0–5. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-2y-2=0, \\ y^2+4z+7=0, \\ z^2+4x+4=0. \end{cases}$ **(<u>$x= –2$, $y=1$, $z= –2$</u>. Сложим все уравнения и выделим в левой части три полных квадрата $(x+2)^2+(y–1)^2+(z+2)^2=0$, откуда получим единственную возможную тройку $x= –2$, $y=1$, $z= –2$, которая при подстановке в систему удовлетворяет всем уравнениям системы.)**



0–6. Дорожная шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Каждая из 28 костей домино покрывает ровно две соседние клетки доски. Уложите комплект домино на доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски. **(см. рис. – 8 пустых клеток отмечены крестиками, причём расстановка соответствует методу пропеллера)**

1–1. Найдите все четырёхзначные числа, у которых сумма первых трёх цифр равна 3, сумма последних трёх цифр равна 5, а сумма всех цифр равна 7. **(<u>2014 и 2104</u>. Из условия следует, что**

первая цифра равна 7–5=2, а последняя цифра равна 7–3=4, тогда в середине должны оказаться цифры 0 и 1 в некотором порядке.)

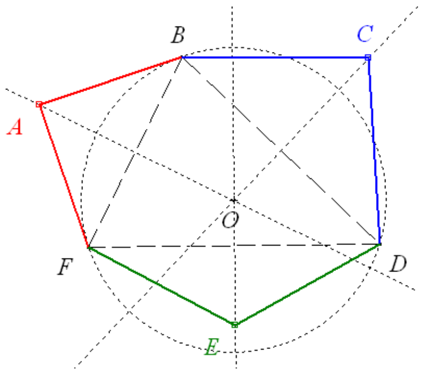
1–2. Какие 500 последовательных натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 2014 цифр? **(9514–10013. Среди этих чисел по принципу Дирихле должны быть пятизначные числа, причём их будет ровно 2014–500·4=14. Значит, наибольшее пятизначное число нашей последовательности будет 14-м пятизначным числом, т.е. 10013.)**

1–3. Найдите наименьшее целое число *x*, для которого $x^2(x-5)(x+3)(x+12)>0$. **(–11, что следует из метода интервалов)**

1–4. Сколько существует четырёхзначных чисел, начинающихся на 20 и взаимно простых с 2014? **(47 чисел. 2014=2·19·53, значит, из ста четырёхзначных чисел, начинающихся на 20, надо выбросить 50 чётных, и 3 нечётных, кратных 19 (2033, 2071) и 53 (2067). Остальные 100–53=47 чисел удовлетворяют условию.)**

1–5. Поезд состоит из локомотива и пяти вагонов: I, II, III, IY и V. Сколькими способами можно расставить эти вагоны после локомотива при условии, что I вагон должен быть ближе к локомотиву, чем II, а порядок остальных не важен? **(60 способов. Для вагонов I и II существует** $C_5^2=\frac{5\cdot 4}{2}=10$ **способов их поставить, т.к. из 5 мест (после локомотива) надо выбрать 2 под эти вагоны, при этом ранее стоит I вагон. На трёх остальных местах три оставшихся вагона можно расставить 3!=6 способами, значит, всего 10·6=60 вариантов.)**

1–6. Дан выпуклый шестиугольник *ABCDEF*, в котором *FA=AB*, *BC=CD*, *DE=EF*. В какой точке пересекаются биссектрисы углов *A*, *C* и *E*? *Укажите её основное свойство относительно какого-нибудь треугольника.* **(В центре *O* описанной окружности треугольника *BDF*. Биссектрисы углов *A*, *C* и *E* являются высотами и медианами равнобедренных треугольников *FAB*, *BCD* и *DEF*, значит, являются серединными перпендикулярами сторон треугольника *BDF*, которые пересекаются в центре описанной окружности этого треугольника.)**



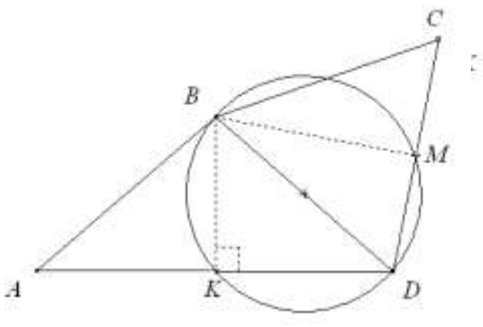
2–2. Найдите наименьшее натуральное число, десятичную запись которого можно разбить на несколько (не менее двух) частей, дающих в произведении 2014. Приведите ответ и само разбиение. **(3853→38·53=2014, получаем перебором вариантов из разложения на простые множители 2014=2·19·53 с учётом возможного появления множителя 1)**

2–3. *ABC* – равносторонний треугольник со стороной *a*. На расстоянии *a* от вершины *A* взята точка *D*. Найдите величину угла *BDC*. **(30° или 150°. Рассмотрим окружность с центром в точке *A* и радиусом *a*. Точки *B*, *C* и *D* лежат на этой окружности, следовательно, ∠*BDC* – вписанный. Значит, в зависимости от расположения точки *D* (на большой или малой дуге *BC*), величина этого угла равна 30° или 150°.)**

2–4. Известно, что $ab+bc+ca \geq a+b+c>0$. Каково наименьшее возможное значение $a+b+c$? **(3. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geq 3(ab+bc+ca)$, откуда $(a+b+c)^2\geq 3(a+b+c)$. Следовательно, $a+b+c\geq 3$. С другой стороны, при $a=b=c=1$ условие задачи выполнено и $a+b+c=3$.)**

2–5. Длины медиан треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите угол между двумя меньшими медианами. **(90°. Пусть *BM*=4, *CN*=3 – медианы треугольника *ABC*. Отметим вне треугольника точку *K* так, что *BMCK* – параллелограмм. Тогда треугольник *CNK* своими сторонами будет иметь отрезки, равные медианам: *CN*=3, *CK*=4, *NK*=5. Этот треугольник удовлетворяет теореме Пифагора, значит, ∠*NCK*=90°. Но этот угол будет равен углу между меньшими медианами Δ*ABC*.)**

2–6. *K* и *M* – середины сторон *AD* и *DC* соответственно выпуклого четырёхугольника *ABCD*, в котором *AB=BD=DC*. Оказалось, что *BKDM* – вписанный четырёхугольник. Какие значения может принимать угол *BCD*? **(60°. В равнобедренном Δ*ABD* (*AB=BD*) середина *K* стороны *AD* будет также основанием высоты из вершины *B*, значит, ∠*BKD*=90°, тогда противоположный ему ∠*BMD* вписанного четырёхугольника *BKDM* также будет равен**



90°. Значит, *BM* одновременно высота и медиана ΔBCD, т.е. этот треугольник – равнобедренный с условием *BD*=*BC*. Но *BD*=*DC*, значит, ΔBCD – равносторонний, а $\angle BCD$=60°.)

3–3. Среди всех четырёхзначных чисел Петя посчитал количество тех из них, в которых сумма первых двух цифр равна сумме двух последних. На что Вася ответил тем, что посчитал количество всех четырёхзначных чисел с суммой цифр, равной 18. Чьё из чисел больше и на сколько? **(Этих чисел будет поровну, т.к. между этими двумя множествами можно устроить взаимно-однозначное соответствие. Каждому Петиному числу $\overline{abcd}$ поставим в соответствие число $\overline{ab(9-c)(9-d)}$, которое окажется Васиным, т.к. *a*+*b*+(9–*c*)+(9–*d*)=18+(*a*+*b*)–(*c*+*d*)=18. И наоборот, каждому Васиному числу, которое мы запишем в виде $\overline{ab(9-c)(9-d)}$, поставим в соответствие число $\overline{abcd}$, которое окажется Петиным.)**

3–4. Найдите наибольшее значение выражения *xy*, если известно, что *x*+2*y*=1. **($\frac{1}{8}$. *Решение 1* (*через выделение полного квадрата*): *x*=1–2*y*, получаем: $xy=(1-2y)y=y-2y^2=(1/8)-2(y-(1/4))^2\le 1/8$, что достигается при *y*=1/4, *x*=1/2. *Решение 2* (*с помощью неравенства Коши*): В силу равенства *x*+2*y*=1 одна из переменных точно будет положительной, поэтому для максимизации их произведения они обе должны быть положительными, иначе их произведение будет неположительным. Тогда в силу неравенства Коши $xy=\frac{1}{2}(x\cdot 2y)\le\frac{1}{2}\left(\frac{x+2y}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$, что достигается при $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{1}{4}$.)**

3–5. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель уже выявился досрочно? (*В каждом туре участники разбиваются на пары. Выигрыш – 1 очко; ничья – 0,5 очка; поражение – 0.*) **(Через 7 туров. Первый способ. Заметим, что после шестого тура разыграно 30 очков и у лидера – не более чем 6 очков, тогда остальные девять участников в сумме набрали не менее, чем 24 очка. Следовательно, найдется хотя бы один шахматист, у которого более трёх очков (*по принципу Дирихле*). Так как впереди ещё 3 тура, то победитель пока неизвестен. После 7 туров вполне могла сложиться ситуация, когда у лидера – 7 очков, а у каждого из остальных участников – меньше, чем 5 очков. Например, это возможно, если лидер свои партии выиграл, а все остальные партии закончились вничью. Тогда, у двух шахматистов, ещё не игравших с лидером, – по 3,5 очка, а у других – по 3 очка. Так как до конца турнира осталось 2 тура, то в этом случае победитель уже определен. Второй способ. Пусть после тура с номером *m* у лидера – *n* очков ($n\le m$), а у следующего за ним (возможно, не единственного) – *k* очков. К этому моменту разыграно 5*m* очков, значит все, кроме лидера, набрали в сумме 5*m* – *n* очков, поэтому $k\ge\frac{5m-n}{9}\ge\frac{4m}{9}$. Тогда $2k\ge m-\frac{m}{9}$, но числа *m* и 2*k* – целые, а $0<\frac{m}{9}<1$, поэтому $2k\ge m \Leftrightarrow k\ge\frac{m}{2}$. Для того, чтобы лидер стал досрочным победителем, должно выполняться неравенство: $(9-m)+k<n\le m$, то есть $k<2m-9$. Таким образом, $\frac{m}{2}<2m-9 \Leftrightarrow m>6$. Построение примера описано выше.)**

3–6. Решите систему уравнений: $\begin{cases}x^3-y^3=26,\\ x^2y-xy^2=6.\end{cases}$ **((–1; –3), (3; 1). Пусть *y*=*kx*, где $k\ne 1$ и $k\ne 0$. Подставив это условие в уравнение, получим, что $x^3=\frac{26}{1-k^3}=\frac{6}{k-k^2}$. Умножим это уравнение на $1-k\ne 0$ и получим уравнение $\frac{26}{1+k+k^2}=\frac{6}{k}$, откуда *k* равно 3 или 1/3. Поэтому $x^3=-1$ или $x^3=27$. В итоге получаем следующие решения: (–1; –3), (3; 1).)**

4–4. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить 16 белых и 16 чёрных ладей так, чтобы никакая чёрная ладья не была под ударом никакой белой ладьи? *Ответ дать числом в* *десятичной записи.* (**<u>4900 способов</u>. Из принципа Дирихле и неравенства Коши следует, что чёрные ладьи стоят в 16 клетках на пересечении 4 вертикалей и 4 горизонталей, аналогично стоят и белые ладьи. Значит, количество нужных нам способов равно количеству способов выбрать 4 горизонтали из 8 и 4 вертикали из 8, т.е.** $\left(C_8^4\right)^2=\left(\dfrac{8!}{4!\cdot 4!}\right)^2=70^2=4900$.**)**

4–5. Петя разбил на пары все натуральные числа от 2011 до 2018 и сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число *S*. Вася утверждает, что может получить *S* другим способом, разбив эти же числа на пары и сложив их попарные произведения. Приведите пример таких разбиений. *Ответ обосновать.* (**Если рассмотреть две суммы попарных произведений** $(n–3)\cdot(n+4)+(n–2)(n+3)+(n–1)(n+1)+n(n+2)$ **и** $(n–3)\cdot(n+3)+(n–2)(n+4)+(n–1)(n+2)+n(n+1)$**, то обе эти суммы равны** $4n^2–4n–19=S$ **при** $n=2014$**. Т.е. имеем равенство** $2011\cdot2018+2012\cdot2017+2013\cdot2015+2014\cdot2016 = 2011\cdot2017+2012\cdot2018+2013\cdot2016+2014\cdot2015 = 16232821$.**)**

4–6. Назовём точку, расположенную внутри треугольника, *плохой*, если из отрезков, соединяющих её с вершинами треугольника, нельзя составить треугольник. Найдите все треугольники, которые имеют плохие точки. **(<u>Все треугольники, за исключением равносторонних</u>. В равносторонних треугольниках сумма любых двух отрезков до вершин больше (по неравенству треугольника) стороны самого равностороннего треугольника (его *диаметра*), что длиннее отрезка до третьей вершины, т.е. для нужных нам трёх отрезков выполняется неравенство треугольника. В любом другом треугольнике *ABC* (*AB* – наибольшая сторона, *BC* – наименьшая) для точки *P* очень близкой к *B* выполняется неравенство *AP* (по длине близко к *AB*) > *BP*+*CP* (по длине близко к *BC*), т.е. *P* – плохая точка.)**

5–5. Вертикали и горизонтали шахматной доски занумерованы слева направо и снизу вверх числами от 1 до 8. В каждой клетке написано произведение номеров вертикали и горизонтали, на которых она стоит. Антон поставил 8 чёрных ладей, не бьющих друг друга, а Боря их снял и поставил в другие клетки 8 белых ладей, не бьющих друг друга. Оказалось, что сумма чисел в клетках и под ладьями Антона, и под ладьями Бори равна 122. *Покажите, как такое могло получиться. Пример обоснуйте.* **(Заметим, что равные суммы могли получиться в случае центрально-симметричных расстановок (см. рис.). Кроме того, из транснеравенства следует, что минимально возможная сумма произведений равна** $1\cdot8+2\cdot7+3\cdot6+4\cdot5+5\cdot4+6\cdot3+7\cdot2+8\cdot1=120$ **и соответствует расстановке 8 ладей на главной диагонали, идущей слева сверху вправо вниз. Значит, нам надо изменить эту сумму всего на 2. Для этого сдвинем две пары ладей с этой главной диагонали в разные стороны – по две ладьи на одну клетку вниз и вверх. *<u>Комментарий:</u>* Кроме того, у этой задачи есть общая идея с задачей 4-5 при подсчёте равных сумм произведений.)**

8	ч	б						
7	б	ч						
6			б	ч				
5			ч	б				
4					ч	б		
3					б	ч		
2							б	ч
1							ч	б
	1	2	3	4	5	6	7	8

5–6. Квадратом какого числа является число $\underbrace{44\ldots4}_{2014}+\underbrace{11\ldots1}_{1008}-\underbrace{66\ldots6}_{1007}$? *Ответ дать числом в десятичной записи.* **(Это квадрат чисел** $\pm\underbrace{66\ldots6}_{1006}7$.

$$\left(\pm\underbrace{66\ldots6}_{1006}7\right)=\left(\frac{2\cdot10^{1007}+1}{3}\right)^2=\frac{4\cdot10^{2014}+4\cdot10^{1007}+1}{9}=\frac{4\cdot10^{2014}-4}{9}+\frac{4\cdot10^{1007}-4}{9}+\frac{9}{9}=$$

$$=\underbrace{44\ldots4}_{2014}+\underbrace{44\ldots4}_{1007}+1+\underbrace{66\ldots6}_{1007}-\underbrace{66\ldots6}_{1007}=\underbrace{44\ldots4}_{2014}+\underbrace{11\ldots1}_{1008}-\underbrace{66\ldots6}_{1007}.$$ **)**

6–6. Назовём *непогожим* промежуток времени в сентябре, состоящий из целого числа дней подряд, среди которых случилось нечётное число дождливых дней. Какое наибольшее количество непогожих промежутков могло быть в сентябре? **(<u>240 непогожих промежутков</u>. Закодируем полночи (после 31 августа и до 1 октября) между днями нулями и единицами следующим образом: 0 означает, что с начала месяца было чётное количество дождливых дней, а 1 – нечётное количество дождливых дней. Всего получим 31-значный код, начинающийся с 0, т.к. до начала месяца дождливые дни не считаем. Тогда любой *непогожий* промежуток начинается и заканчивается разными цифрами. Значит, нам надо найти наибольшее возможное количество пар 0 и 1 в 31-значном коде. Пусть у нас *n* нулей и (31–*n*) единиц. Значит, нужное нам число пар** $n(31-n)\le\left(\dfrac{n+(31-n)}{2}\right)^2=15{,}5^2=240{,}25$ **согласно неравенству Коши. Тогда количество непогожих промежутков максимально равно 240=16·15, что возможно при 16 нулях и 15 единицах, например, в случае, когда был ровно 1 дождливый день – 16 сентября.)**