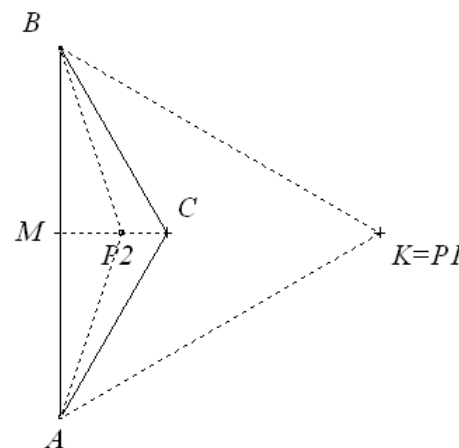


- 0-0. Найдите в плоскости равнобедренного треугольника ABC с $\angle C = 120^\circ$ все положения точки P , удовлетворяющей равенствам $PA + BC = PB + CA = PC + AB$. Укажите точно положения точки P в системе координат, где $C(1;0)$ и $M(0;0)$ – середина стороны AB . (Точки $P_1(3;0)$ и $P_2\left(\frac{8\sqrt{3}-7}{11}; 0\right)$.)



Заметим, что $CA=BC$, значит, $PA=PB$ и точка P лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB . Введём систему координат, где $M(0;0)$ – середина стороны AB , $C(1;0)$, $P(p;0)$. Тогда $BC=CA=2$, $AB=2\sqrt{3}$, $AP=BP=\sqrt{p^2+3}$, $CP=|1-p|$. Условие $PA+BC = PB+CA = PC+AB$ даёт нам уравнение $\sqrt{p^2+3}+2=|1-p|+2\sqrt{3}$, решив которое в зависимости от случаев (точка P находится правее C и левее C) найдём $P_1(3;0)$ – третья вершина равностороннего треугольника ABK (C – его центр) и $P_2\left(\frac{8\sqrt{3}-7}{11}; 0\right)$.

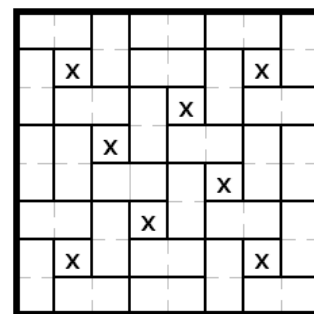
- 0-1. Найдите все натуральные числа N , для которых $N+11$ и $N-78$ – полные квадраты. (2014. Пусть $N+11=a^2$, $N-78=b^2$, где a и b – натуральные числа. Тогда $89=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, откуда в силу простоты числа 89 и условия $a>b>0$ следует, что $a-b=1$, $a+b=89$. Значит, $a=45$, $b=44$, $N=45^2-11=2014$.)

- 0-2. Найдите функцию $f(x)$, если $f(2x+1) = 4x^2 + 14x + 7$. ($f(x) = x^2 + 5x + 1$. Пусть $t = 2x + 1$, тогда $x = \frac{t-1}{2}$. Следовательно, $f(t) = 4 \cdot \frac{(t-1)^2}{4} + 14 \cdot \frac{t-1}{2} + 7 = (t-1)^2 + 7(t-1) + 7 = t^2 + 5t + 1$.)

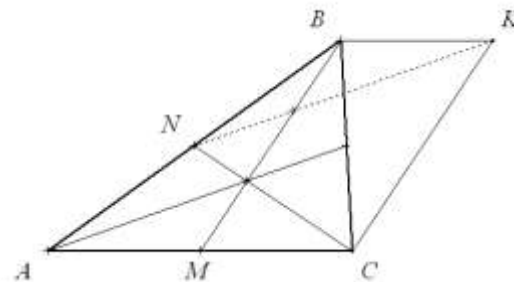
- 0-3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 - 2y - 2 = 0, \\ y^2 + 4z + 7 = 0, \\ z^2 + 4x + 4 = 0. \end{cases}$$
 ($x=-2, y=1, z=-2$. Сложим все уравнения и

выделим в левой части три полных квадрата $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 0$, откуда получим единственную возможную тройку $x=-2, y=1, z=-2$, которая при подстановке в систему удовлетворяет всем уравнениям системы.)

- 0-4. Дорожная шахматная доска имеет небольшой бортик по границам игрового поля, не позволяющий фигурам соскальзывать. Каждая из 28 костей домино покрывает ровно две соседние клетки доски. Уложите комплект домино на доске так, чтобы ни одну из костей нельзя было сдвинуть с места в плоскости доски. (см. рис. – 8 пустых клеток отмечены крестиками, причём расстановка соответствует методу пропеллера)



- 0-5. Длины медиан треугольника равны 3, 4 и 5. Найдите угол между двумя меньшими медианами. (90°. Пусть $BM=4$, $CN=3$ – медианы треугольника ABC . Отметим вне треугольника точку K так, что $BMCK$ – параллелограмм. Тогда треугольник CNK своими сторонами будет иметь отрезки, равные медианам: $CN=3$, $CK=4$, $NK=5$. Этот треугольник удовлетворяет теореме Пифагора, значит, $\angle NCK=90^\circ$. Но этот угол будет равен углу между меньшими медианами $\triangle ABC$.)



- 0-6. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить 16 белых и 16 чёрных ладей так, чтобы никакая чёрная ладья не была под ударом никакой белой ладьи? Ответ дать числом в десятичной записи. (4900 способов. Из принципа Дирихле и неравенства Коши следует, что

чёрные ладьи стоят в 16 клетках на пересечении 4 вертикалей и 4 горизонталей, аналогично стоят и белые ладьи. Значит, количество нужных нам способов равно количеству способов

выбрать 4 горизонтали из 8 и 4 вертикали из 8, т.е. $(C_8^4)^2 = \left(\frac{8!}{4!4!}\right)^2 = 70^2 = 4900.$

1–1. Сколько существует четырёхзначных чисел, начинающихся на 20 и взаимно простых с 2014? (47 чисел. $2014=2 \cdot 19 \cdot 53$, значит, из ста четырёхзначных чисел, начинающихся на 20, надо выбросить 50 чётных, и 3 нечётных, кратных 19 (2033, 2071) и 53 (2067). Остальные $100-53=47$ чисел удовлетворяют условию.)

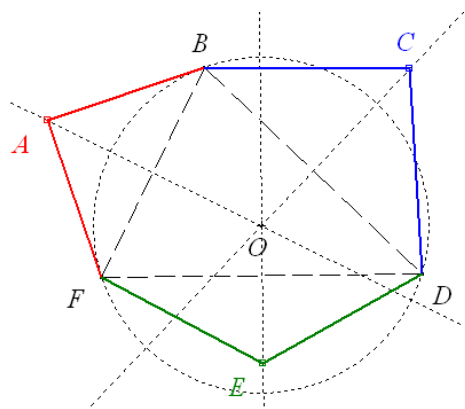
1–2. ABC – равносторонний треугольник со стороной a . На расстоянии a от вершины A взята точка D . Найдите величину угла BDC . (30° или 150° . Рассмотрим окружность с центром в точке A и радиусом a . Точки B, C и D лежат на этой окружности, следовательно, $\angle BDC$ – вписанный. Значит, в зависимости от расположения точки D (на большой или малой дуге BC), величина этого угла равна 30° или 150° .)

1–3. Найдите наибольшее значение выражения xy , если известно, что $x+2y=1$. ($\frac{1}{8}$. Решение 1 (через

выделение полного квадрата): $x=1-2y$, получаем: $xy=(1-2y)y=y-2y^2=(1/8)-2(y-(1/4))^2 \leq 1/8$, что достигается при $y=1/4$, $x=1/2$. Решение 2 (с помощью неравенства Коши): В силу равенства $x+2y=1$ одна из переменных точно будет положительной, поэтому для максимизации их произведения они обе должны быть положительными, иначе их произведение будет неположительным. Тогда в силу неравенства Коши

$$xy = \frac{1}{2}(x \cdot 2y) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x+2y}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{8}, \text{ что достигается при } x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{4}.)$$

1–4. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $FA=AB$, $BC=CD$, $DE=EF$. В какой точке пересекаются биссектрисы углов A, C и E ? Укажите её основное свойство относительно какого-нибудь треугольника. (В центре O описанной окружности треугольника BDF . Биссектрисы углов A, C и E являются высотами и медианами равнобедренных треугольников FAB, BCD и DEF , значит, являются серединными перпендикулярами сторон треугольника BDF , которые пересекаются в центре описанной окружности этого треугольника.)



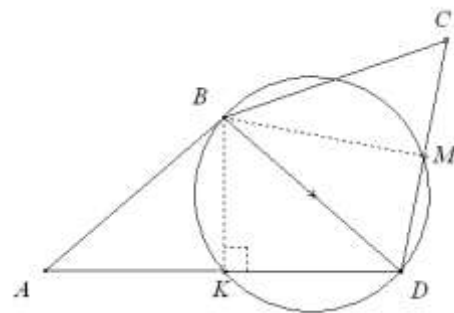
1–5. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$ ($(-1; -3), (3; 1)$).

Пусть $y=kx$, где $k \neq 1$ и $k \neq 0$. Подставив это условие в уравнение, получим, что $x^3 = \frac{26}{1-k^3} = \frac{6}{k-k^2}$. Умножим это уравнение на $1-k \neq 0$ и получим уравнение $\frac{26}{1+k+k^2} = \frac{6}{k}$, откуда k равно 3 или $1/3$. Поэтому $x^3 = -1$ или $x^3 = 27$. В итоге получаем следующие решения: $(-1; -3), (3; 1)$.

1–6. Среди всех четырёхзначных чисел Петя посчитал количество тех из них, в которых сумма первых двух цифр равна сумме двух последних. На что Вася ответил тем, что посчитал количество всех четырёхзначных чисел с суммой цифр, равной 18. Чьё из чисел больше и на сколько? (Этих чисел будет поровну, т.к. между этими двумя множествами можно устроить взаимно-однозначное соответствие. Каждому Петину числу $\overline{abcd}$ поставим в соответствие число $\overline{ab(9-c)(9-d)}$, которое окажется Васиным, т.к. $a+b+(9-c)+(9-d)=18+(a+b)-(c+d)=18$. И наоборот, каждому Васиному числу, которое мы запишем в виде $\overline{ab(9-c)(9-d)}$, поставим в соответствие число $\overline{abcd}$, которое окажется Петиним.)

2–2. Найдите наименьшее натуральное число, десятичную запись которого можно разбить на несколько (не менее двух) частей, дающих в произведении 2014. Приведите ответ и само разбиение. ($3853 \rightarrow 38 \cdot 53 = 2014$, получаем перебором вариантов из разложения на простые множители $2014=2 \cdot 19 \cdot 53$ с учётом возможного появления множителя 1)

2–3. K и M – середины сторон AD и DC соответственно выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB=BD=DC$. Оказалось, что $BKDM$ – вписанный четырёхугольник. Какие значения может принимать угол BCD ? (**60°**. В равнобедренном $\triangle ABD$ ($AB=BD$) середина K стороны AD будет также основанием высоты из вершины B , значит, $\angle BKD=90^\circ$, тогда противоположный ему $\angle BMD$ вписанного четырёхугольника $BKDM$ также будет равен 90° . Значит, BM одновременно высота и медиана $\triangle BCD$, т.е. этот треугольник – равнобедренный с условием $BD=BC$. Но $BD=DC$, значит, $\triangle BCD$ – равносторонний, а $\angle BCD=60^\circ$.)



2–4. Известно, что $ab+bc+ca \geq a+b+c > 0$. Каково наименьшее возможное значение $a+b+c$? (**3**. $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca)$, откуда $(a+b+c)^2 \geq 3(a+b+c)$. Следовательно, $a+b+c \geq 3$. С другой стороны, при $a=b=c=1$ условие задачи выполнено и $a+b+c=3$.)

2–5. Петя разбил на пары все натуральные числа от 2011 до 2018 и сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число S . Васа утверждает, что может получить S другим способом, разбив эти же числа на пары и сложив их попарные произведения. Приведите пример таких разбиений. *Ответ обосновать.* (Если рассмотреть две суммы попарных произведений $(n-3) \cdot (n+4) + (n-2)(n+3) + (n-1)(n+1) + n(n+2)$ и $(n-3) \cdot (n+3) + (n-2)(n+4) + (n-1)(n+2) + n(n+1)$, то обе эти суммы равны $4n^2 - 4n - 19 = S$ при $n=2014$. Т.е. имеем равенство $2011 \cdot 2018 + 2012 \cdot 2017 + 2013 \cdot 2015 + 2014 \cdot 2016 = 2011 \cdot 2017 + 2012 \cdot 2018 + 2013 \cdot 2016 + 2014 \cdot 2015 = 16232821$.)

2–6. Вертикали и горизонтали шахматной доски занумерованы слева направо и снизу вверх числами от 1 до 8. В каждой клетке написано произведение номеров вертикали и горизонтали, на которых она стоит. Антон поставил 8 чёрных ладей, не бьющих друг друга, а Боря их снял и поставил в другие клетки 8 белых ладей, не бьющих друг друга. Оказалось, что сумма чисел в клетках и под ладьями Антона, и под ладьями Бори равна 122. *Покажите, как такое могло получиться. Пример обоснуйте.* (Заметим, что равные суммы могли получиться в случае центрально-симметричных расстановок (см. рис.). Кроме того, из транснеравенства следует, что минимально возможная сумма произведений равна $1 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1 = 120$ и соответствует расстановке 8 ладей на главной диагонали, идущей слева сверху вправо вниз. Значит, нам надо изменить эту сумму всего на 2. Для этого сдвинем две пары ладей с этой главной диагонали в разные стороны – по две ладьи на одну клетку вниз и вверх. **Комментарий:** Кроме того, у этой задачи есть общая идея с задачей 2–5 при подсчёте равных сумм произведений.)

8	4	6						
7	6	4						
6			6	4				
5			4	6				
4					4	6		
3					6	4		
2							6	4
1							4	6
	1	2	3	4	5	6	7	8

3–3. Назовём точку, расположенную внутри треугольника, *плохой*, если из отрезков, соединяющих её с вершинами треугольника, нельзя составить треугольник. Найдите все треугольники, которые имеют плохие точки. (**Все треугольники, за исключением равносторонних.** В равносторонних треугольниках сумма любых двух отрезков до вершин больше (по неравенству треугольника) стороны самого равностороннего треугольника (его *диаметра*), что длиннее отрезка до третьей вершины, т.е. для нужных нам трёх отрезков выполняется неравенство треугольника. В любом другом треугольнике ABC (AB – наибольшая сторона, BC – наименьшая) для точки P очень близкой к B выполняется неравенство AP (по длине близко к AB) $> BP+CP$ (по длине близко к BC), т.е. P – плохая точка.)

3–4. Квадратом какого числа является число $\underbrace{44}_{2014}\underbrace{34}_{1008} + \underbrace{11}_{1007} \dots 1 - \underbrace{66}_{1007}\underbrace{36}_{1006}$? *Ответ дать числом в десятичной записи.* (Это квадрат чисел $\pm \underbrace{66}_{1006}\underbrace{36}_{1006}$.)

$$\left(\pm \underbrace{66}_{1006}\underbrace{36}_{1006} \right) = \left(\frac{2 \cdot 10^{1007} + 1}{3} \right)^2 = \frac{4 \cdot 10^{2014} + 4 \cdot 10^{1007} + 1}{9} = \frac{4 \cdot 10^{2014} - 4}{9} + \frac{4 \cdot 10^{1007} - 4}{9} + \frac{9}{9} =$$

$$= \underbrace{44}_{2014}\underbrace{34}_{1007} + \underbrace{44}_{2014}\underbrace{34}_{1007} + 1 + \underbrace{66}_{1007}\underbrace{36}_{1007} - \underbrace{66}_{1007}\underbrace{36}_{1007} = \underbrace{44}_{2014}\underbrace{34}_{1008} + \underbrace{11}_{1008} \dots 1 - \underbrace{66}_{1007}\underbrace{36}_{1007}.$$

3–5. В однокруговом турнире участвуют 10 шахматистов. Через какое наименьшее количество туров может оказаться так, что единоличный победитель уже выявился досрочно? (В каждом туре участники разбиваются на пары. Выигрыш – 1 очко; ничья – 0,5 очка; поражение – 0.) **(Через 7 туров. Первый способ.** Заметим, что после шестого тура разыграно 30 очков и у лидера – не более чем 6 очков, тогда остальные девять участников в сумме набрали не менее, чем 24 очка. Следовательно, найдется хотя бы один шахматист, у которого более трёх очков (по принципу Дирихле). Так как впереди ещё 3 тура, то победитель пока неизвестен. После 7 туров вполне могла сложиться ситуация, когда у лидера – 7 очков, а у каждого из остальных участников – меньше, чем 5 очков. Например, это возможно, если лидер свои партии выиграл, а все остальные партии закончились вничью. Тогда, у двух шахматистов, ещё не игравших с лидером, – по 3,5 очка, а у других – по 3 очка. Так как до конца турнира осталось 2 тура, то в этом случае победитель уже определен. **Второй способ.** Пусть после тура с номером m у лидера – n очков ($n \leq m$), а у следующего за ним (возможно, не единственного) – k очков. К этому моменту разыграно $5m$ очков, значит все, кроме лидера, набрали в сумме $5m - n$ очков, поэтому $k \geq \frac{5m - n}{9} \geq \frac{4m}{9}$. Тогда $2k \geq m - \frac{m}{9}$, но числа m и $2k$ – целые, а $0 < \frac{m}{9} < 1$, поэтому $2k \geq m \Leftrightarrow k \geq \frac{m}{2}$. Для того, чтобы лидер стал досрочным победителем, должно

выполняться неравенство: $(9 - m) + k < n \leq m$, то есть $k < 2m - 9$. Таким образом, $\frac{m}{2} < 2m - 9$

$\Leftrightarrow m > 6$. Построение примера описано выше.)

3–6. Петя играет с компьютером. Компьютер бросает на поле 9×9 шарик одного из k цветов. После этого Петя перемещает этот шарик на одно из свободных полей. Если пять или более шариков одного цвета оказываются выстроенными подряд в один ряд по горизонтали или вертикали, то они уничтожаются. При каких k компьютер может завалить Петю? **(При $k \geq 19$.** Если $k \geq 19$, компьютер может бросить 19 раз по 4 шарика каждого цвета. На поле останется 5 свободных клеток. Назовем линией пять идущих подряд по горизонтали или вертикали клеток, из которых четыре заняты шариками одного цвета, а одна свободна. Покажем, что линий меньше 19. В самом деле, через одну точку могут пройти не более 4 линий, причем, такая точка только одна – в центре доски. Если же через центр проходят 4 линии, то, как легко видеть, больше линий на доске нет. В противном случае через любую клетку проходит не более трех линий, и всего линий – не более 15. Итак, после того, как на поле останется 5 клеток, компьютер может выбрать цвет, для которого не существует линии, и выбросить шарик этого цвета. Так будут заняты все свободные клетки. Пусть цветов не больше 18. Выделим на каждой горизонтали по два прямоугольника 1×5 , пересекающихся по одной клетке, назовем каждому цвету свой прямоугольник и будем помещать в него все шарики этого цвета подряд, начиная с края поля. Легко видеть, что, играя таким образом, Петя не проиграет.)

4–4. Число $1/97$ представили в виде бесконечной десятичной дроби. Первую ненулевую цифру после запятой вычеркнули. Представьте получившееся число в виде обыкновенной дроби. **(3/970.** Так как $1/50 > 1/97 > 1/100$, то первая цифра после запятой в числе $1/97$ равна 0, а вторая единица. Тогда вычеркивание второй цифры после запятой в числе $1/97$ есть не что иное, как вычитание из него $1/100$ и умножение полученного результата на 10. Следовательно, получится число $a = 10(1/97 - 1/100) = 3/970$.)

4–5. Петя раскрашивает 2014 точек, расположенных на окружности, в 19 цветов. Затем Коля проводит хорды с концами в отмеченных точках так, чтобы концы любой хорды были одноцветны и хорды не имели общих точек (в том числе и общих концов). При этом Коля хочет провести как можно больше хорд, а Петя старается ему помешать. Какое наибольшее количество хорд заведомо сможет провести Коля? **(105.** Заметим, что $2014 = 19 \cdot 106$; поэтому найдутся 2 цвета, в которые покрашены в сумме не менее $2 \cdot 106 = 212$ точек. Докажем индукцией по k , что через $2k-1$ точку двух цветов всегда можно провести $k-1$ непересекающуюся хорду с одноцветными концами. База очевидна. Пусть $k > 2$. Тогда среди точек возьмем две одноцветных, стоящих подряд. Соединим их хордой, выбросим и применим предположение индукции к оставшимся точкам. Выбрав 211 точек двух цветов и применив данное утверждение, получаем, что 105 хорд Коля сможет провести всегда. Осталось привести пример, когда больше хорд провести нельзя. Пусть на окружности стоит $19k$ точек. Пусть Петя покрасит каждую точку в цвет,

соответствующий остатку от деления на 19 её номера. Докажем индукцией по k , что через эти точки можно провести не более $k-1$ хорды с выполнением условия. База очевидна, докажем переход. Пусть проведено некоторое количество хорд. Рассмотрим две соединенные точки A и B на минимальном расстоянии друг от друга, получим такую хорду AB , что на одной из дуг, на которые она делит окружность, нет концов других проведенных хорд. Теперь сотрём хорду AB и уберём с окружности все точки этой дуги, включая один из концов хорды. Мы получили исходную раскраску $19l$ точек при $l < k$. Они соединены не более чем $l-1$ хордой, поэтому изначально хорд было не больше $l-1+1 \leq k-1$, что и требовалось.)

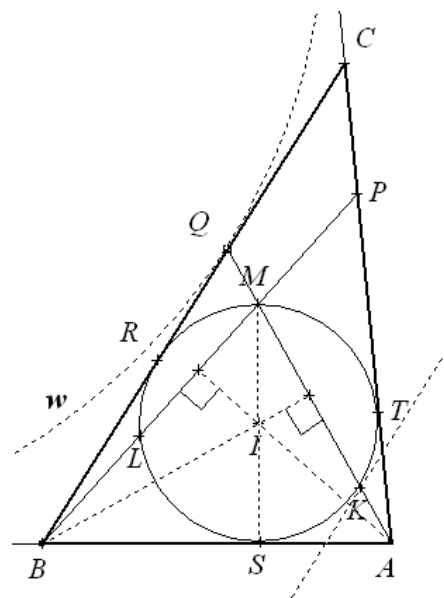
- 4–6. Собралась компания из 10 человек. Оказалось, что среди любых 6 человек этой компании число пар знакомых одно и то же. Сколько всего пар знакомых может быть во всей компании? (0 или 45. Возможен случай, когда знакомых вообще нет. Рассмотрим теперь случай, когда знакомые есть, и докажем, что в данной компании каждый знаком с каждым (45 знакомств). Заметим для начала, что если взять любую группу из 7 человек, у каждого из её членов будет одно и то же число знакомых среди остальных членов группы (назовём это число *степенью* группы). В самом деле, кого бы ни убрать из группы, общее число знакомств среди 3 оставшихся по условию будет одним и тем же. Допустим, в компании есть люди, не знакомые между собой. Тогда, поскольку в компании есть и знакомые, найдётся группа L из 7 человек, среди которых есть как не знакомые между собой люди A и B , так и хотя бы двое знакомых между собой. Возьмём человека C , не входящего в L , и заменим в группе L человека A на C . Получится новая группа M . При замене L на M число знакомых человека B среди членов группы не уменьшилось, поэтому степень у M не меньше, чем у L . С другой стороны, после удаления A и добавления C число знакомых у тех, кто был знаком с A , не увеличилось. Поэтому степень у M не больше, чем у L . Стало быть, степени у M и L равны. Поэтому C знаком в L точности с теми же людьми, что и A : ведь при переходе от L к M им надо восполнить потерю знакомства с A . Пусть D — один из этих людей. Заменим в L человека D на C . Получим некоторую группу N . Поскольку D знаком в L не со всеми (так как не со всеми знаком в ней A), рассуждая так же, как выше, убеждаемся, что степени групп L и N равны. Но это невозможно, так как при переходе от L к N мы теряем все знакомства человека D , а восполнить можем только на одно меньше, ибо теряем также знакомство C с D . Полученное противоречие показывает, что незнакомых в данной компании быть не может.)

- 5–5. Назовём *непогожим* промежуток времени в сентябре, состоящий из целого числа дней подряд, среди которых случилось нечётное число дождливых дней. Какое наибольшее количество непогожих промежутков могло быть в сентябре? (240 непогожих промежутков. Закодируем полночи (после 31 августа и до 1 октября) между днями нулями и единицами следующим образом: 0 означает, что с начала месяца было чётное количество дождливых дней, а 1 — нечётное количество дождливых дней. Всего получим 31-значный код, начинающийся с 0, т.к. до начала месяца дождливые дни не считаем. Тогда любой *непогожий* промежуток начинается и заканчивается разными цифрами. Значит, нам надо найти наибольшее возможное количество пар 0 и 1 в 31-значном коде. Пусть у нас n нулей и $(31-n)$ единиц. Значит,

$$n(31-n) \leq \left(\frac{n+(31-n)}{2} \right)^2 = 15,5^2 = 240,25 \quad \text{согласно неравенству}$$

Коши. Тогда количество непогожих промежутков максимально равно $240=16 \cdot 15$, что возможно при 16 нулях и 15 единицах, например, в случае, когда был ровно 1 дождливый день — 16 сентября.)

- 5–6. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки P и Q соответственно. Оказалось, что $AB=AP=BQ=1$, а точка пересечения отрезков AQ и BP лежит на вписанной окружности треугольника ABC . Какие значения может принимать периметр треугольника ABC ? (4. Пусть вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB , BC и AC в точках S , R и T ; M — точка пересечения отрезков AQ и BP . Можно заметить, что точка P лежит на отрезке CT , а точка Q — на отрезке CR . Тогда отрезки AM и BM вторично пересекают окружность. Обозначим точки пересечения через K и L соответственно. Если I — центр



окружности, то BI – биссектриса угла BAC . При симметрии относительно прямой BI точка S перейдёт в R , точка A – в Q (т.к. $BQ=BA$), а окружность – в себя. Поэтому дуги KS и MR равны. Аналогично докажем, что равны дуги SL и MT . Поскольку $BI \perp AM$ и $AI \perp BM$, I – ортоцентр треугольника ABM . Поэтому $MI \perp AB$, и MS – диаметр окружности. Значит, равны дуги KT и RL . Следовательно, дуга $KTMR$ равна 180° , значит, KR – диаметр окружности. При гомотетии с центром A , переводящей окружность во вневписанную окружность w треугольника ABC , касательная l в точке K к окружности перейдёт в параллельную ей касательную к окружности w , т.е. в прямую BC , а луч AK – в себя. Поэтому Q – точка касания окружности w со стороной BC . Тогда, если p – полупериметр треугольника ABC , то $1=BQ=p-AB=p-1$. Отсюда находим, что $p=2$. Следовательно, периметр треугольника ABC равен 4.)

- 6–6. Сколько существует последовательностей $\{a_n\}$ натуральных чисел, больших 1, для которых выполняется равенство $a_{n+3} \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 38$? (**4 последовательности.** Заметим, что $(a_{n+4} - a_{n+2})a_{n+3} = a_{n+2} - a_n$. Поскольку $a_{n+3} > 1$, получаем $|a_{n+4} - a_{n+2}| < |a_{n+2} - a_n|$, если $a_{n+2} - a_n \neq 0$; если же $a_{n+2} - a_n = 0$, то и $a_{n+4} - a_{n+2} = 0$. Пусть $|a_3 - a_1| = N$. Тогда верна цепочка неравенств $|a_{2N+3} - a_{2N+1}| \leq |a_{2N+1} - a_{2N-1}| - 1 \leq \dots \leq |a_3 - a_1| - N = 0$, т.е. при всех $n > N$ выполняется равенство $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$, т.е. $a_{2n+1} = a_{2n-1}$. Аналогично, при всех $n > N = |a_2 - a_4|$ выполняется равенство $a_{2n+2} = a_{2n}$. Таким образом, начиная с некоторого места, последовательность выглядит так: $a, b, a, b, \dots$. Из условия получаем $ab = a + b + 38$, т.е. $(a-1)(b-1) = 39$. Тогда (поскольку $a, b > 1$) один из множителей равен 1, а другой – 39, или 3 и 13, т.е. $\{a, b\} = \{2, 40\}$ или $\{4, 14\}$. Таким образом, начиная с некоторого номера последовательность выглядит как $\dots, 2, 40, 2, 40, 2, 40, \dots$ или $\dots, 4, 14, 4, 14, \dots$. Однако, согласно условию, $a_n = a_{n+3} \cdot a_{n+2} - a_{n+1} - 38$, т.е. a_n однозначно выражается через последующие три члена. Поэтому последовательность с самого начала выглядит как $2, 40, 2, 40, \dots$, либо $40, 2, 40, 2, \dots$, либо $4, 14, 4, 14, \dots$, либо $14, 4, \dots$ – всего 4 варианта.)