Девятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 20-27.09.2014

Финал. Премьер-лига. 26 сентября 2014 г.

1. Рассмотрим 1000 конечных множеств F. Конечное множество A называется *осколочным*, если для любого подмножества $X \subseteq A$ найдётся такое множество $B \in F$, что $B \cap A = X$. Докажите, что существует не менее 1000 осколочных множеств.

2. Множество натуральных чисел, не превосходящих 2014, назовём *правильным*, если никакие два числа из этого множества не отличаются ровно на 4. Докажите, что количество правильных множеств является квадратом натурального числа.

3. Внутри единичного круга отмечено 60 точек. Докажите, что на окружности этого круга найдётся точка, сумма расстояний от которой до отмеченных точек не превосходит 80.

4. Точка M — середина дуги BC описанной окружности треугольника ABC. Точка I_A — центр его вневписанной окружности, касающейся стороны BC в точке D. Прямая MD вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке P. Докажите, что $\angle API_A = 90°$.

5. Дано простое число $p > 3$. Натуральное число n таково, что $n^2 + n + 1$ делится на p. Докажите, что $(n+1)^p - n^p - 1$ делится на p^2.

6. Есть 100 неокрашенных кубиков. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно выбрать одну непокрашенную грань любого кубика и покрасить её в черный или белый цвет. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Вася получает от Пети столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Петя?

7. Натуральные числа a, b, c и d таковы, что $ac + bd$ делится на $a^2 + b^2$. Докажите, что $(a^2 + b^2, c^2 + d^2) \neq 1$.

8. Для положительных чисел a_1, a_2, …, a_n ($n \geqslant 3$) докажите неравенство

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geqslant \frac{a_2}{a_1+a_2} + \frac{a_3}{a_2+a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_1}{a_n+a_1}.$$