Девятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 20-27.09.2014

Командная олимпиада. 20 сентября 2014 г.

Старшие лиги

1. На плоскости отмечены $n \geqslant 3$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая из отмеченных точек окрашена в один из трёх цветов, причём в каждый цвет окрашена хотя бы одна точка. Докажите, что существует треугольник с вершинами трёх разных цветов, внутри которого нет отмеченных точек.

2. В треугольнике ABC точка D – середина стороны AB, а точка E – середина отрезка CD. Докажите, что если $\angle CAE = \angle BCD$, то $AC = CD$.

3. Тридцать школьников занумерованы числами от 1 до 30. Каждый из них сказал: "Каждый, чей номер взаимно прост с моим, иногда лжёт". Какое наибольшее количество школьников, всегда говорящих правду, может быть среди этих тридцати?

4. Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\left[\frac{a+b+c}{d}\right] + \left[\frac{b+c+d}{a}\right] + \left[\frac{c+d+a}{b}\right] + \left[\frac{d+a+b}{c}\right]$$

при целых положительных a, b, c, d.

5. По кругу разложены $n > 3$ карт рубашкой вверх. Разрешается взять любые три карты A, B, C, лежащие подряд в указанном порядке, и положить C на место A, не переворачивая, а A и B – перевернуть и положить на места B и C соответственно. Можно ли такими операциями добиться того, чтобы все карты оказались на своих первоначальных местах рубашкой вниз?

6. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, а O – его центр описанной окружности. Определим точку A' как вторую точку пересечения окружности, построенной на AH, как на диаметре, и описанной окружности треугольника BCH. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что центр описанной окружности треугольника $A'B'C'$ лежит на прямой OH.

7. Пусть n – натуральное число. Каждая клетка доски $(2n+1) \times (2n+1)$ окрашена в чёрный или белый цвет. Клетка называется *крутой*, если в её строке хотя бы n других клеток имеют тот же цвет, что и она, и в её столбце хотя бы n других клеток имеют тот же цвет, что и она. Найдите наименьшее возможное количество крутых клеток.

8. Дано нечётное натуральное $k > 3$. Докажите, что для бесконечно многих натуральных n число $n + k$ является суммой двух натуральных делителей числа $\frac{n^2+1}{2}$.