X Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок». VII Турнир математических игр.

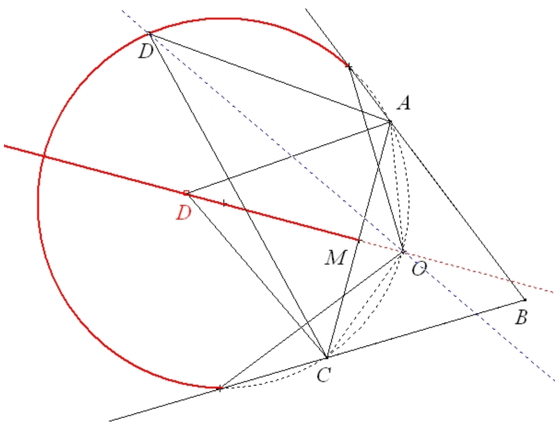
Математическая игра «Пенальти». ***<u>Младшая лига (7-9 классы).</u>*** **<u>Решения</u>**. ***10 сентября 2014 года***

1. На доске записана серия дробей вида $\frac{2014}{14}$; $\frac{2015}{15}$; $\frac{2016}{16}$ ... Сколько из этих дробей являются целыми числами? (**<u>14</u>. Дробь $\frac{2000+N}{N}$ будет целым числом тогда, когда $2000 \vdots N$. У числа $2000=2^4 \cdot 5^3$ будет (4+1)(3+1)=20 натуральных делителей, из которых 6 делителей (1, 2, 4, 5, 8, 10) будут меньше 14, значит, 20–6=14 делителей дадут нам дроби с целым значением.)**

2. Продавец ювелирного магазина решил убедиться, что 20 бриллиантов, расположенных на витрине в ряд и весящих 80, 81, . . . , 99 каратов, действительно расположены в порядке возрастания весов. Каким наименьшим числом взвешиваний на электронных весах, выдерживающих не более 200 каратов, он может это сделать? (**<u>13 взвешиваний</u>. За один раз на весах можно взвесить не более двух бриллиантов. Рассмотрим граф, в котором вершины − бриллианты, ребро − взвешивание (либо ребро−петля, если на весах был один бриллиант, либо обычное ребро, если на весах были два бриллианта.) В графе не может быть более одной изолированной вершины, иначе невозможно распознать монеты, не участвовавшие во взвешиваниях. Кроме того, не может быть компоненты связности из двух вершин с одним ребром (или несколькими кратными рёбрами − это лишние взвешивания). В каждой компоненте связности (кроме изолированной вершины и дерева) рёбер будет не меньше, чем вершин. Таким образом, уменьшить количество рёбер можно только за счёт изолированной вершины и деревьев, в которых не менее трёх вершин (таких деревьев не более [19:3]=6). Значит, у нас не менее 20−1−6=13 рёбер-взвешиваний. Приведём пример на 13 взвешиваний. Сначала по два взвешивания на каждую из шести троек бриллиантов (80-81, 81-82), (83-84, 84-85), …, (95-96, 96-97), затем узнаем 98 и автоматически остаётся бриллиант на 99 карат.)**

2	**1/4**	**2**
1/4	**16**	**1/4**
2	**1/4**	**2**

3. В таблице 3×3 расставлены числа так, что произведение чисел в каждой строке и каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Какое число стоит в центре? Приведите ответ и пример. (**<u>16</u>. Перемножим произведения во всех четырёх квадратах, оно равно 2^4=16. При этом каждое угловое число мы учли по одному разу, каждое число в середине у края учли по два раза, а центральное число – 4 раза. Но это общее произведение можно представить как произведение произведений трёх строк, среднего столбца, средней строки и центрального числа. Но в строках и столбцах произведения равны 1, значит, 16 – это само центральное число.)**



4. O − центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Найдите геометрическое место точки D такой, что $ABCD$ − выпуклый четырёхугольник, у которого биссектриса угла D проходит через точку O. (**Объединение внутренних точек дуги AC описанной окружности треугольника AOC, на которой не лежит точка O и ограниченной лучами BA и BC (без точек этих лучей), и точек луча OM, лежащих за точкой M, где M − середина отрезка AC.)**

5. Дана последовательность из 300 цифр: $\underbrace{11\ldots1}_{100}\underbrace{22\ldots2}_{100}\underbrace{33\ldots3}_{100}$. На какое наибольшее количество частей-чисел можно её разрезать так, чтобы все полученные при этом числа были различными? (**<u>41 число</u>. Если у нас есть число, содержащее и 1, и 2, и 3, то количество чисел можно будет увеличить, разрезав это длинное число где-то среди двоек. Тогда у нас возможны максимум два числа, содержащих в своей записи разные цифры (со стыком 12 и со стыком 23), а остальные числа-репдигиты содержат в себе только одинаковые цифры. При этом разных репдигитов из одинаковых цифр будет не более 13, т.к.**

если бы их было не менее 14, то для них понадобилось бы не менее 1+2+3+…+14=15·14/2=105 одинаковых цифр, что больше имеющихся 100, – противоречие. Значит, у нас не более чем по 13 чисел-репдигитов, состоящих только из 1, только из 2 и только из 3, а также ещё возможно два числа с различными цифрами, т.е. всего не более 3·13+2=41 числа. Приведём пример на 41 число: 1, 11, 111, …, $\underbrace{1\ldots1}_{13}$, $\underbrace{1\ldots1}_{9}\underbrace{2\ldots2}_{8}$, 2, 22, …, $\underbrace{2\ldots2}_{13}$, $2\underbrace{3\ldots3}_{9}$, 3, 33, 333, …, $\underbrace{3\ldots3}_{13}$.)

6. На гипотенузе *AB* прямоугольного треугольника *ABC* взяты точки *M* и *N* так, что *AN* = *AC* и *BM* = *BC*. Какие значения может принимать отношение $\frac{MN^2}{AM\cdot BN}$? **(2. Пусть *AB=c*, *BC=a*, *CA=b*, тогда *MN=AN+BM−AB=a+b−c*, *AM=AB−BM=c−a*, *BN=AB−AN=c−b*. Значит, с учётом теоремы Пифагора ($a^2+b^2=c^2$) получим, что $\frac{MN^2}{AM\cdot BN}=\frac{(a+b-c)^2}{(c-a)(c-b)}=\frac{a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca}{c^2+ab-ac-bc}=2$.)**

7. Натуральное число назовём *равномернорастущим*, если его цифры идут в неубывающем порядке и каждая цифра равна количеству различных цифр, не больших её и входящих в запись этого числа, например, числа 111 222 334 4 и 123 456 777 8. Сколько всего равномернорастущих десятизначных чисел? **(511=2⁹−1. Начнём выбирать цифру для числа, начиная со старшего разряда. Первая цифра однозначно 1, вторая – либо 1, либо 2 (два варианта выбора), каждая следующая цифра также выбирается двумя способами (либо прежняя цифра, либо большая её на единицу). Всего будет 2^9=512 вариантов выбора. Но один случай нам не даёт десятизначного числа – когда на каждом шаге была выбрана следующая цифра и получилась несуществующая цифра 10 на десятом шаге.)**

8. Поля шахматной доски занумерованы, как показано на рисунке. Расставьте на этой доске несколько ферзей так, чтобы они не били друг друга, а сумма номеров полей, на которых они стоят, была наибольшей. *Ферзей расставьте на поле, вырезав его из листа с условиями задач.* **(Разделим доску на 2 части – фактически прямоугольники 4×8. В**

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

п… ч… с… с… с… ц…

0	1	2	3	4	5	6	7	8
16	17	18	19	20	21	22	23	24
32	33	34	35	36	37	38	39	40
48	49	50	51	52	53	54	55	56
	1	2	3	4	5	6	7	8

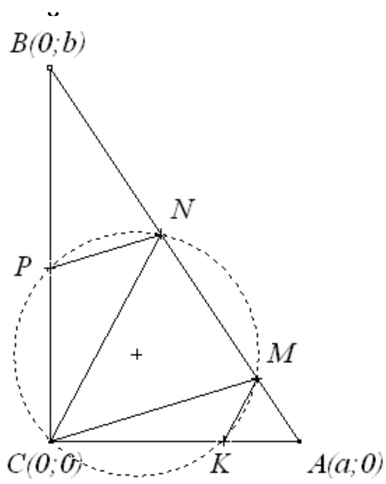
16	15	14	13	12	11	10	9	8
32	31	30	29	28	27	26	25	24
48	47	46	45	44	43	42	41	40
64	63	62	61	60	59	58	57	56
8	7	6	5	4	3	2	1	

клетке будет записано число, равное сумме её координат, введённых нами. В каждый прямоугольник можно поставить не более 4 ферзей, которые здесь фактически являются ладьями. Максимум суммы чисел клеток будет тогда, когда мы смо… ры в каждый прямоугольник, захватив и все строки, и все сто… динатами. Для этого в первой части ферзей надо ставить в пра… части – в левой зоне 4×4, причём неважно в каком порядке, лиш… . Нам это удастся сделать, если воспользоваться знаменитой цен… становкой 8 ферзей, не бьющих друг друга (см. рис.).)

1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9
17	18	19	20	21	22	23	24
32	31	30	29	28	27	26	25
33	34	35	36	37	38	39	40
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
64	63	62	61	60	59	58	57

9. В компании 32 человека. Оказалось, что любых 30 из них можно разбить на 15 пар знакомых. Какое наименьшее число пар знакомых может быть в этой компании? **(48. У каждого в такой компании должно быть не меньше трёх знакомых: иначе, удалив двух человек, мы сможем «изолировать» одного из её членов. Поэтому всего пар знакомых в ней не меньше, чем 3·32/2 = 48. Пример, когда пар ровно 48, получается, если расставить людей по кругу через равные промежутки и каждого познакомить с двумя соседями и человеком, стоящим напротив. Если мы выбросим двух людей, стоящих напротив, то оставшихся можно разбить на 15 пар стоящих напротив. Пусть мы выбросим двоих, не стоящих напротив. Если на каждой из двух образованных ими дуг стоит по чётному числу людей, разобьём их на пары соседей. Если же на каждой – по нечётному числу людей,**

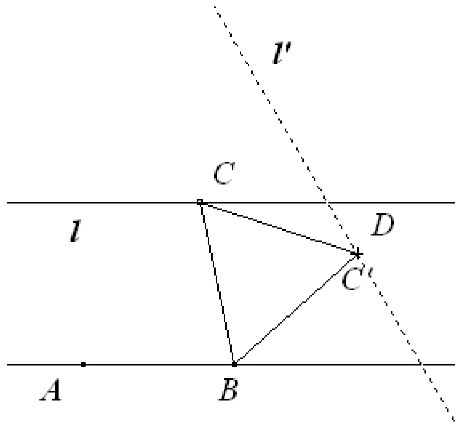
на меньшей дуге разобьём на пары всех, кроме одного из крайних, а противоположного. После этого, как несложно проверить, большая д чётного числа людей, и мы сможем разбить каждую из них на пары с



10. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки M и N так, что $AN = AC$ и $BM = BC$. Найдите координаты вторых точек пересечения с катетами описанной окружности треугольника CMN, если известны координаты вершин треугольника: $A(a;0)$, $B(0;.b)$, $C(0;0)$, где a и b − положительные числа. **(*K* ($a+b-\sqrt{a^2+b^2}$;0), *P*(0; $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$). Пусть окружность пересекает катеты *AC* и *BC* соответственно в точках *K* и *P*. Тогда в силу равнобедренности треугольников *NAC* и *MBC* у нас появятся две равнобочные трапеции *KCNM* и *PCMN*, где *KC*=*MN*=*PC*. Длина отрезка *MN* равна *AN*+*BM*−*AB*=$a+b-\sqrt{a^2+b^2}$, что следует из теоремы Пифагора. Тогда это число и будет соответственно первой и второй координатой у точек *K* и *P*.)**

11. В стране Динарии одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму ровно в один динар, причём для этого всегда нужно менее 100 монет. Барон Мюнхгаузен привёз оттуда 7 монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один динар. Приведите пример, когда слова барона будут правдой. **(<u>1 динар равен 96 единичным монетам, монеты 7 достоинств − 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48, каждое из которых является делителем числа 96. При этом 96=1+2+3+6+12+24+48.</u>)**

12. Найдите наименьшее натуральное число, у которого произведение суммы цифр этого числа и произведения цифр равно 2014. ($\underbrace{11\ldots1}_{1005}2$. **Заметим, что 2014 раскладывается на простые множители как 2·19·53, но не существует ненулевых цифр (а нуля в нашем чисел быть не может), кратных 19 и 53. Значит, 19 и 53 входят как множители в число, равное сумме цифр. Тогда либо сумма цифр равна 2014 (произведение цифр равно 1), что соответствует числу из 2004 единиц, либо сумма цифр равна 1007 (произведение цифр равно 2), что соответствует числу из одной двойки и 1005 единиц, наименьшее из которых оканчивается на 2.)**



13. A и B − фиксированные точки плоскости. Точка C движется по прямой l, удалённой от прямой AB на фиксированное расстояние. Точка D является третьей вершиной равностороннего треугольника BCD и располагается с точкой A в разных полуплоскостях относительно прямой BC. Найдите геометрическое место точки D. **(При повороте на 60° относительно точки *B* точка *C* перейдёт в точку *C'*=*D*, значит, геометрическим местом точки *D* будет <u>прямая *l'*, получающаяся при повороте прямой *l* относительно B на угол в 60°</u> (см. рис.))**

14. На доске написана правильная несократимая дробь. Петя прибавил к её числителю единицу (сохранив знаменатель), а Вася вычел из её знаменателя числитель (сохранив числитель). Получились равные дроби. Какая дробь могла быть написана исходно? **(<u>1/2</u>. Пусть исходная дробь равна p/q. По условию $(p+1)/q = p/(q-p)$, откуда $(p+1)(q-p) = pq$. Из последнего равенства получаем $q = p^2+p$, откуда $p/q = p/(p^2+p) = 1/(p+1)$. Поскольку по условию исходная дробь несократима, то $p = 1$, откуда и получается ответ.)**

15. Натуральное число назовём *равномерноубывающим*, если его цифры идут в невозрастающем порядке и каждая цифра равна количеству различных цифр, меньших её и входящих в запись этого числа, например, числа 4 444 333 210 и 7 665 432 210. Сколько всего равномерноубывающих десятизначных чисел? **(<u>$511=2^9-1$</u>. Начнём выбирать цифру для числа, начиная с разряда единиц. Первая цифра однозначно 0, вторая − либо 0, либо 1 (два варианта выбора), каждая следующая цифра также выбирается двумя способами (либо прежняя цифра, либо большая её на единицу). Всего будет $2^9=512$ вариантов выбора. Но один случай нам не даёт десятизначного числа − когда на каждом шаге был выбран 0.)**

16. Электронные часы показывают два числа: часы и минуты в режиме 24 часов. Вася, взглянув на циферблат своих часов, обнаружил, что разность между большим и меньшим из этих чисел равна 30. Какой может быть разность между большим и меньшим из этих чисел через 30 минут? **(<u>Либо 1, либо 23</u>. Число часов не может быть больше 23, поэтому большим является число минут и оно больше 30. Значит за 30 минут до того, как Вася взглянул на часы, был тот же час, а число часов равнялось числу минут, и их разность равнялась нулю. Через 30 минут после того, как он взглянул на часы, час будет следующий, а число минут будет таким же, как и час назад. Таким образом, разность будет равна разности между двумя числами, показывающими количество часов в двух соседних часах, то есть одному или двадцати трем (когда часы в разных сутках).)**