

Математический бой. Тур 1.

27 сентября

1. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC выбрали точки P и Q соответственно таким образом, что PQ равно сумме расстояний от P и Q по прямой BC и проекции точек P и Q на сторону BC равноудалены от середины BC . Касательные к описанной окружности ABC в точках BC и C пересекаются в точке T . Докажите, что описанная окружность треугольника APQ касается окружности с центром в T , проходящей через B и C .

2. Дан выпуклый n -угольник, $n \geq 4$. Найдите количество способов провести $n - 3$ диагонали так, чтобы никакие две из них не пересекались во внутренней точке n -угольника и чтобы никакие три из них не образовывали треугольник.

3. Дан правильный 100-угольник. 50 его вершин покрасили в синий цвет, остальные — в красный. Все 1225 попарных расстояний между красными точками выписали в неубывающем порядке. То же самое сделали с попарными расстояниями между синими точками. Докажите, что две получившиеся последовательности совпадают.

4. В шеренге 20 орлят. Вожатому нужно разбить их на группы подряд стоящих так, чтобы количество орлят в каждой группе было нечетным. Сколькими способами он может это сделать?

5. Даны натуральные числа a и b . Докажите, что существуют натуральные числа x и y такие, что $C_{x+y}^2 = ax + by$.

6. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена окружность, которая касается прямой AC в точке C и пересекает луч AB в точках X и Y . Докажите, что $\angle BCX = \angle BCY$.

7. Коля и Федя по очереди ставят на свободные поля доски $m \times n$ ($m, n > 2015$) фигуры: Коля — коней, Федя — ферзей так, что каждая следующая фигура должна находиться под боем предыдущей поставленной. Коля начинает, проигрывает тот, кто не может сделать ход. Укажите все пары (m, n) , при которых выигрывает Коля.

8. Даны положительные числа a, b, c , сумма которых равна 3. Найдите минимальное значение выражения $A = \frac{2 - a^3}{a} + \frac{2 - b^3}{b} + \frac{2 - c^3}{c}$.

9. Найдите все бесконечные последовательности натуральных чисел $\{a_i\}$, удовлетворяющие следующим двум свойствам:

(i) $a_{nk} = a_n a_k$ при всех натуральных n, k

(ii) Для бесконечного количества натуральных чисел n выполнено $\{1, 2, \dots, n\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

10. Рассматриваются всевозможные 100-значные числа, где каждая цифра равна 1 или 2. У каждого вычисляется остаток от деления на 1024. Сколько среди этих остатков разных?