Десятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 26.09.-02.10.2015

Первый тур. Премьер-лига. 27 сентября 2015 г.

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q соответственно таким образом, что PQ равно сумме расстояний от P и Q по прямой BC и проекции точек P и Q на сторону BC равноудалены от середины BC. Докажите, что на описанной окружности треугольника APQ найдётся точка S такая, что $\angle BSC - \angle BAC = 90°$.

2. Найдите наибольшее значение a, для которого неравенство $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant x + y + a\sqrt{xy}$ выполнено при всех положительных x и y.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC$ проведена окружность, которая касается прямой AC в точке C и пересекает луч AB в точках X и Y. Докажите, что $\angle BCX = \angle BCY$.

4. Дан правильный 100-угольник. 50 его вершин покрасили в синий цвет, остальные – в красный. Все 1225 попарных расстояний между красными точками выписали в неубывающем порядке. То же самое сделали с попарными расстояниями между синими точками. Докажите, что две получившиеся последовательности совпадают.

5. Дано n сидений, стоящих в ряд. Сколькими способами их можно разбить на группы подряд стоящих так, чтобы количество сидений в каждой группе было нечётным?

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существуют натуральные числа x и y такие, что
$$C^2_{x+y} = ax + by.$$

7. Сколько существует четырёхэлементных множеств натуральных чисел, содержащих число 2015 и таких, что все попарные разности элементов этих множеств – простые числа?

8. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске 100×100 так, чтобы каждая отмеченная клетка граничила по стороне не более, чем с одной отмеченной клеткой?

Десятый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 26.09.-02.10.2015

Первый тур. Премьер-лига. 27 сентября 2015 г.

1. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбрали точки P и Q соответственно таким образом, что PQ равно сумме расстояний от P и Q по прямой BC и проекции точек P и Q на сторону BC равноудалены от середины BC. Докажите, что на описанной окружности треугольника APQ найдётся точка S такая, что $\angle BSC - \angle BAC = 90°$.

2. Найдите наибольшее значение a, для которого неравенство $\sqrt{x^2+y^2} \geqslant x + y + a\sqrt{xy}$ выполнено при всех положительных x и y.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $AB = AC$ проведена окружность, которая касается прямой AC в точке C и пересекает луч AB в точках X и Y. Докажите, что $\angle BCX = \angle BCY$.

4. Дан правильный 100-угольник. 50 его вершин покрасили в синий цвет, остальные – в красный. Все 1225 попарных расстояний между красными точками выписали в неубывающем порядке. То же самое сделали с попарными расстояниями между синими точками. Докажите, что две получившиеся последовательности совпадают.

5. Дано n сидений, стоящих в ряд. Сколькими способами их можно разбить на группы подряд стоящих так, чтобы количество сидений в каждой группе было нечётным?

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что существуют натуральные числа x и y такие, что
$$C^2_{x+y} = ax + by.$$

7. Сколько существует четырёхэлементных множеств натуральных чисел, содержащих число 2015 и таких, что все попарные разности элементов этих множеств – простые числа?

8. Какое наибольшее количество клеток можно отметить на доске 100×100 так, чтобы каждая отмеченная клетка граничила по стороне не более, чем с одной отмеченной клеткой?