



Десятый южный математический турнир

Старт-лига высшая

I тур. 27.09.2015 г.



1. Есть 88 яблок, средний вес яблока равен 100 г. Средний тех вес яблок, которые легче 100 г, равен 85 г. Средний вес тех яблок, которые тяжелее 100 г, равен 135 г. Какое наименьшее число яблок может иметь вес ровно 100 г
2. В одной капле живут «амёбы-рыцари», которые всегда говорят правду, и «амёбы-лжецы», которые всегда лгут. Особенность их в том, что, сделав какое-то заявление, каждая из них меняет свой тип: «амёба-рыцарь» становится «амёбой-лжецом» и наоборот. Однажды миллион амёб расположились по кругу. Начав с амёбы Жени и обойдя круг по часовой стрелке, их всех по очереди спросили: «Твои соседи сейчас одного типа?». Затем снова, начав с Жени и обойдя круг против часовой стрелки, им всем задали тот же вопрос. Все ответы были «Да» или «Нет». Какое наибольшее число ответов «Да» могло быть?
3. I – точка пересечения биссектрис в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB . Известно, что $AC=BC+BI$. Найдите углы A и B .
4. Во время операции «Перехват» на кольцевой дороге стоят с равными промежутками 100 человек, среди них 50 – инспектора ГИБДД и 50 – сотрудники ФСБ. Докажите, что расстояние по кольцу между наиболее удаленными друг от друга инспекторами равно расстоянию по кольцу между наиболее удаленными друг от друга сотрудниками ФСБ.
5. Есть три квадрата общей площадью 1 дм^2 . Докажите, что их можно без наложений поместить в плоскую квадратную коробку площадью 2 дм^2 .
6. Рассматриваются всевозможные 100-значные числа, где каждая цифра равна 3 или 5. У каждого вычисляется остаток от деления на 1024. Сколько среди этих остатков разных?
7. Петя разбил на пары все натуральные числа от 2012 до 2019 и сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число P . Вася разбил эти же числа на пары по-другому и тоже сложил произведения чисел в своих четырёх парах, получив число V . Может ли быть, что $P=V$?
8. Из 3 жёлтых и 3 синих палочек сложен шестиугольник так, что на его контуре цвета палочек чередуются. Из каждых трёх подряд идущих палочек можно сложить треугольник. Докажите, что из палочек какого-то из цветов тоже можно сложить треугольник.