

Математический бой. Тур 2.

28 сентября

1. Даны попарно различные ненулевые вещественные числа a, b, c . Известно, что многочлены $ax^3 + bx + c = 0$, $bx^3 + cx + a = 0$, $cx^3 + ax + b = 0$ имеют общий корень. Докажите, что хотя бы один из этих многочленов имеет хотя бы два корня.

2. Существуют ли такие натуральные числа a и b , что оба числа $ab^5 + 3$ и $a^5b + 3$ являются кубами натуральных чисел?

3. Вася написал на доске 100 различных чисел. За один ход можно взять два различных числа и заменить каждое из них на их среднее арифметическое. Сначала ход делает Петя, а дальше всё время ходы делает Вася. Мог ли Вася выписать такие числа, чтобы он всегда, независимо от первого хода Пети, мог через некоторое время сделать все числа равными?

4. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно так, что $AP = AQ$. На стороне BC выбраны точки R и S ($BR > BS$) таким образом, что $\angle BRP = \angle BPS$ и $\angle CSQ = \angle CQR$. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

5. Пусть точка M — середина стороны BC треугольника ABC , а точка D — точка касания вписанной окружности с этой стороной. Биссектриса угла A треугольника пересекает окружность с центром в точке M , проходящую через D в точках P и Q . Докажите, что $\angle PMQ + \angle BAC = 180^\circ$.

6. Для положительных чисел a, b, c , удовлетворяющих равенству $a^3 + b^3 = c^2$, докажите неравенство

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

7. Дана таблица 10×10 . Она заполнена целыми неотрицательными числами. Такая расстановка называется *правильной*, если выполняются два условия: каждое число отличается от любого числа в соседней по стороне клетке не более, чем на 1; если какое-то число не превосходит ни одного числа в соседних по стороне клетках, то оно равно 0. Сколько существует правильных расстановок?

8. В компании из n человек любые двое с одинаковым числом знакомых не знакомы друг с другом. Найдите наибольшее возможное число пар знакомых.

9. Дано натуральное число n . Найдите все функции $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ такие, что для любых целых x, y выполняется равенство $f(x + y + f(y)) = f(x) + ny$.

10. Выпуклый 12-угольник разбит на 20 треугольников. Докажите, что одна из сторон многоугольника является стороной одного из треугольников.