Десятый Южный математический турнир

ВДЦ "Орлёнок", 26.09.-02.10.2015

Второй тур. Премьер-лига. 28 сентября 2015 г.

1. Существуют ли такие натуральные числа a и b, что оба числа ab^5+3 и a^5b+3 являются кубами натуральных чисел?

2. Вася написал на доске 100 различных чисел. За один ход можно взять два различных числа и заменить их оба на среднее арифметическое. Сначала ход делает Петя, а дальше всё время ходы делает Вася. Мог ли Вася выписать такие числа, чтобы он всегда, независимо от первого хода Пети, мог через некоторое время сделать все числа равными?

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно такие, что $AP = AQ$. На стороне BC выбраны точки R и S ($BR > BS$) таким образом, что $\angle BRP = \angle BPS$ и $\angle CSQ = \angle CQR$. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

4. Можно ли рёбра полного графа с 200 вершинами окрасить в 200 цветов таким образом, чтобы в любом треугольнике все рёбра были разных цветов?

5. Пусть M – середина стороны BC треугольника ABC, а D – точка касания вписанной окружности с этой стороной. Биссектриса угла A треугольника пересекает окружность с центром в точке M, проходящую через D, в точках P и Q. Докажите, что $\angle PMQ + \angle BAC = 180°$.

6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

7. Сколькими способами можно раставить целые неотрицательные числа во всех клетках таблицы 10×10 так, чтобы (i) каждые два числа в клетках, имеющих общую сторону, отличались не более, чем на 1, и (ii) каждое число, не превосходящее ни одного числа в соседних по стороне клетках, было равно 0?

8. Натуральные числа a_1 и a_2 не превосходят n^2. Докажите, что существуют натуральные b_1 и b_2, не превосходящие n, такие, что $(a_1 + b_1, a_2 + b_2) < n$.