

Бой за 1-е место в группе. Тур 3.

30 сентября

1. Прямые, проведенные через середину M стороны AB остроугольного треугольника ABC перпендикулярно сторонам AC и BC , пересекают прямые, проведенные через точки A и B перпендикулярно AB , в точках E и F соответственно. Отрезки EF и CM пересекаются в точке D . Докажите, что $\angle EMF = \angle ADB$.

2. На плоскости нарисованы 2015 окружностей единичного радиуса. Докажите, что найдутся либо 27 окружностей, среди которых любые две пересекаются, либо найдутся 27 окружностей, среди которых никакие две не пересекаются.

3. На сторонах AB , AC треугольника ABC нашлись соответственно точки D и E так, что окружности ACD и ADE касаются прямой BC . Прямые BC и DE пересекаются в точке F . Докажите, что AF перпендикулярна прямой Эйлера треугольника ABC .

4. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$.

5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $a^{d(a)} + b^{d(b)}$, где $d(n)$ — количество натуральных делителей числа n .

6. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + y + z = xyz$. Докажите, что $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x + y + z)$.

7. Назовем натуральное число k *великолепным*, если любой остаток по модулю 20^{15} представим как сумма k -ых степеней чисел от 1 до n (по модулю 20^{15}) при некотором натуральном n . Найдите наименьшее великолепное число.

8. Натуральное число без нулей в записи назовем *семь-расчудесным*, если каждое двузначное число, образованное двумя подряд идущими цифрами, делится на 7. Найдите сумму всех 666-значных семь-расчудесных чисел.

9. В стране 100 аэропортов. У компании Super-Air несколько прямых двусторонних рейсов (рейс считается в обоих направлениях, между двумя городами не более одного прямого рейса компании Super-Air). Важностью аэропорта называется количество рейсов компании Super-Air, соединяющих его с другими аэропортами. Новая компания Concur-Air открывает прямой рейс между двумя городами тогда и только тогда, когда сумма важностей этих городов не менее 100. Оказалось, что существует циклический маршрут из рейсов компании Concur-Air, проходящий через каждый аэропорт ровно один раз. Докажите, что то же условие выполнено и для рейсов компании Super-Air.

10. На доске 100×100 стоит 100 не бьющих друг друга ладей. За один ход можно сдвинуть одну ладью на соседнюю по стороне клетку. Несколько ладей могут при этом стоять в одной клетке. За какое наименьшее число ходов заведомо можно поставить все ладьи на одну из диагоналей?