

Бой за 3-е место в группе. Тур 3.

30 сентября

1. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает высоту CD в точке E , а описанную окружность треугольника BDE вторично в точке F . Оказалось, что эта окружность касается прямой CF . Каким может быть угол FDB ?

2. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + y + z = xyz$. Докажите, что $2(x^2 + y^2 + z^2) \geq 3(x + y + z)$.

3. На столе по кругу лежат монеты в 1, 2 и 3 копейки. У копеек сосед по часовой стрелке лежит орлом, против часовой — решкой, у двушек — наоборот, а у 3-копеечных оба соседа лежат одинаково — оба орлом или оба решкой. Может ли на столе лежать в сумме ровно 10 рублей?

4. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $p^2(p^3 - 1) = q(q + 1)$.

5. Прямые, проведённые через середину M стороны AB остроугольного треугольника ABC перпендикулярно сторонам AC и BC , пересекают прямые, проведённые через точки A и B перпендикулярно AB , в точках E и F соответственно. Отрезки EF и CM пересекаются в точке D . Докажите, что $\angle EMF = \angle ADB$.

6. Натуральное число без нулей в записи назовем *семь-расчудесным*, если каждое двузначное число, образованное двумя подряд идущими цифрами, делится на 7. Найдите сумму всех 99-значных семь-расчудесных чисел.

7. В таблице 2014×2015 отмечены 4028 клеток, среди которых есть все 2015 клеток первой строки. Докажите, что столбцы таблицы можно разбить на две группы, количества отмеченных клеток в которых равны.

8. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных чисел n , что $n!$ не делится на $n^8 + 1$.

9. На доске 100×100 стоит 100 не бьющих друг друга ладей. За один ход можно сдвинуть одну ладью на соседнюю по стороне клетку. Несколько ладей могут при этом стоять в одной клетке. За какое наименьшее число ходов заведомо можно поставить все ладьи на одну из диагоналей?

10. В Стране Дураков прошли выборы, в которых участвовали две партии. Правящая партия набрала вдвое меньше голосов, чем оппозиционная (часть избирателей испортила бюллетени). Председатель избирательной комиссии может изменить результат любой партии ровно на $a\%$ от числа проголосовавших за эту партию. При каком наименьшем целом a он заведомо сможет добиться того, чтобы у правящей партии результат оказался выше, чем у оппозиционной?