Полуфинальный бой

1 октября

1. Дан треугольник ABC. Внешняя и внутренняя биссектрисы угла $\angle CAB$ пересекают сторону BC в точках D и E соответственно. Пусть F — точка на отрезке BC. Описанная окружность треугольника ADF пересекает AB и AC в точках I и J соответственно. Обозначим через N середину отрезка IJ, а через H — основание перпендикуляра из E на DN. Докажите, что E — центр вписанной окружности треугольника AHF.

2. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC продолжения высот AA_1 и BB_1 пересекают его описанную окружность в точках A_0 и B_0 соответственно. Прямая A_0B_0 пересекает прямую AB в точке P. Пусть H - ортоцентр треугольника ABC, K - центр описанной окружности треугольника ABH. Докажите, что $PH \perp CK$.

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $2xyz + xy + xz + yz = 1$. Докажите, что существуют такие положительные a, b, c, что $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$.

4. Пусть m — натуральное число. На координатной плоскости нарисованы различные окружности c_0, c_1, $\ldots$, c_n, с центрами на оси Ox, так, что окружность c_k касается окружности c_{k-1} для $k = 1, 2, \ldots, n$ и кроме того, все эти окружности касаются эллипса $x^2/m + y^2 = 1$. Докажите, что если c_0 имеет центр $(0, 0)$ и m — натуральное, то радиусы всех окружностей рациональны.

5. На экране компьютера горит натуральное число, не делящееся на 5. Каждую минуту к нему прибавляется его последняя цифра. Докажите, что через некоторое время на экране компьютера будет гореть степень восьмёрки.

6. Пусть $p > 7$ — простое число, S_k — сумма произведений элементов во всех k-элементных подмножествах множества $\{1, 2, \ldots, p-1\}$. Докажите, что $pS_{p-3} - S_{p-2}$ делится на p^4.

7. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске 100×100. Ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом может поставить на свободные поля доски 4 фишки, образующие квадрат 2×2. Вася своим ходом может убрать любую фишку с доски. Цель Пети: поставить 10 подряд фишек по горизонтали или вертикали. Может ли Вася ему помешать?

8. На плоскости берется пара 100-угольников M_1, M_2 (под многоугольником мы понимаем его внутренность с границей), множество вершин которых является множеством из 200 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и таких что пересечение $M_1 \cap M_2$ которых является объединением k попарно непересекающихся многоугольников. Найдите наибольшее возможное значение k.

9. Для данных конечных множеств A и B положительных чисел мощности не меньше 2 рассматривается множество $C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. Могут ли элементы множества C, выписанные в порядке возрастания, образовывать арифметическую прогрессию?

10. Дано натуральное n. В республике 5 областей, в каждой области ровно $5n$ аэропортов. У каждой из 5 авиакомпаний несколько двусторонних рейсов, каждый рейс соединяет два города из разных областей, при этом для любой пары городов из разных областей найдется рейс одной из авиакомпаний, который соединяет города из этой пары. Найдите наибольшее целое D такое, что при данных условиях всегда можно выбрать одну авиакомпанию и D аэропортов (из всех $25n$ аэропортов) так, чтобы из любого выбранного города можно было добраться до любого другого выбранного города только рейсами выбранной авиакомпании.