

Бои за 5 и 7 места

1 октября

1. Найдите все натуральные числа g такие, что для любого нечётного простого числа p найдётся такое натуральное число n , что числа $g^n - n$ и $g^{n+1} - (n + 1)$ делятся на p .

2. На экране компьютера горит натуральное число, не делящееся на 5. Каждую минуту к нему прибавляется его последняя цифра. Докажите, что через некоторое время на экране компьютера будет гореть степень восьмёрки.

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz}$$

при положительных x, y, z .

4. В группе людей среди любых четверых есть либо кто-то, знающий троих остальных, либо кто-то, не знающий троих остальных. Докажите, что эту группу можно разбить на две, в одной из которых все знают друг друга, а в другой — не знают друг друга.

5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. На его диагонали BD нашлась такая точка X , что $\angle BAC = \angle XAD$ и $\angle XCD = \angle ACB$. Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.

6. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске 100×100 . Ходят по очереди, начинает Петя. Он своим ходом может поставить на свободные поля доски 4 фишки, образующие квадрат 2×2 . Вася своим ходом может убрать любую фишку с доски. Цель Пети: поставить 10 подряд фишек по горизонтали или вертикали. Может ли Вася ему помешать?

7. Точка H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла A пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D . Оказалось, что $HA = HD$. Чему может быть равен угол A этого треугольника?

8. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Каждый кусок нужно разрезать на две части. Докажите, что можно разрезать и выложить все получившиеся куски в ряд так, чтобы в каждой паре отношение большего к меньшему не превосходило 2.

9. Положительные числа x, y, z таковы, что $2xyz + xy + xz + yz = 1$. Докажите, что существуют такие положительные a, b, c , что $x = \frac{a}{b+c}$, $y = \frac{b}{a+c}$, $z = \frac{c}{a+b}$.

10. Рассматриваются всевозможные пары 10-угольников A и B (возможно, невыпуклых) на плоскости. Контур многоугольника B разбивает многоугольник A на k частей. Найдите наибольшее возможное значение k .