

Десятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 26.09.-02.10.2015

Четвертый тур. Премьер-лига. 1 октября 2015 г.

1. Найдите все натуральные g такие, что при каждом нечётном простом p найдётся натуральное n , для которого оба числа $g^n - n$ и $g^{n+1} - (n+1)$ делятся на p .
2. На экране компьютера горит натуральное число, не делящееся на 5. Каждую минуту к нему прибавляется его последняя цифра. Докажите, что через некоторое время на экране компьютера будет гореть степень восьмёрки.
3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ при положительных x, y, z .
4. В группе людей среди любых четверых есть либо кто-то, знающий троих остальных, либо кто-то, не знающий троих остальных. Докажите, что эту группу можно разбить на две, в одной из которых все знают друг друга, а в другой – не знают друг друга.
5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. На его диагонали BD нашлась такая точка X , что $\angle BAC = \angle XAD$ и $\angle XCD = \angle ACB$. Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.
6. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске 100×100 . Ходят по очереди, начинает Петя. Своим ходом он может поставить на свободные поля доски 4 фишки, образующие квадрат 2×2 . Вася своим ходом может убрать любую фишку с доски. Цель Пети: поставить 10 подряд фишек по горизонтали или вертикали. Может ли Вася ему помешать?
7. Точка H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла A пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D . Оказалось, что $HA = HD$. Чему может быть равен угол A этого треугольника?
8. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Каждый кусок нужно разрезать на 2 части. Докажите, что можно разрезать и выложить все получившиеся куски в ряд так, чтобы в каждой паре соседних кусков отношение большего веса к меньшему не превосходило 2.

Десятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 26.09.-02.10.2015

Четвертый тур. Премьер-лига. 1 октября 2015 г.

1. Найдите все натуральные g такие, что при каждом нечётном простом p найдётся натуральное n , для которого оба числа $g^n - n$ и $g^{n+1} - (n+1)$ делятся на p .
2. На экране компьютера горит натуральное число, не делящееся на 5. Каждую минуту к нему прибавляется его последняя цифра. Докажите, что через некоторое время на экране компьютера будет гореть степень восьмёрки.
3. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz}$ при положительных x, y, z .
4. В группе людей среди любых четверых есть либо кто-то, знающий троих остальных, либо кто-то, не знающий троих остальных. Докажите, что эту группу можно разбить на две, в одной из которых все знают друг друга, а в другой – не знают друг друга.
5. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. На его диагонали BD нашлась такая точка X , что $\angle BAC = \angle XAD$ и $\angle XCD = \angle ACB$. Докажите, что $AB \cdot CD = BC \cdot AD$.
6. Петя и Вася играют в игру на клетчатой доске 100×100 . Ходят по очереди, начинает Петя. Своим ходом он может поставить на свободные поля доски 4 фишки, образующие квадрат 2×2 . Вася своим ходом может убрать любую фишку с доски. Цель Пети: поставить 10 подряд фишек по горизонтали или вертикали. Может ли Вася ему помешать?
7. Точка H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC . Биссектриса угла A пересекает описанную окружность этого треугольника в точке D . Оказалось, что $HA = HD$. Чему может быть равен угол A этого треугольника?
8. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Каждый кусок нужно разрезать на 2 части. Докажите, что можно разрезать и выложить все получившиеся куски в ряд так, чтобы в каждой паре соседних кусков отношение большего веса к меньшему не превосходило 2.