



Десятый южный математический турнир
Старт-лига высшая (бои за 5-8 места)
Старт-лига первая
IV тур. 1.10.2015 г.



1. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + 12 \geq 4(a + b + c).$$

2. Какое наибольшее количество прямых можно провести на плоскости так, чтобы каждая прямая пересекала ровно четыре другие?

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 99. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть три числа с суммой 100. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. Клетки шахматной доски занумерованы числами 1, 2, ..., 64. Докажите, что найдутся две клетки с общей стороной, чьи номера отличаются не более чем на 30.

5. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 20152015.$$

6. Туристическое агентство Орлятии предлагает кольцевые автобусные маршруты по стране. Каждый маршрут проходит по городам маршрута ровно по разу. Есть маршруты из 3, 4, 5, 6 и 7 городов. Какое наименьшее число автодорог может быть в Орлятии, если каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. (С дороги на другую дорогу вне города переехать нельзя).

7. Дан квадрат $ABCD$. На отрезках AC и BC выбраны точки E и F соответственно так, что $FE = ED$. Найдите угол FDE .

8. Натуральные числа от 1 до 30 000 выписаны по порядку:

$$123456789101112\dots2999930000.$$

Сколько раз в этой последовательности цифр встречается комбинация 2015 (именно в этом порядке)?