Десятый южный математический турнир

Старт-лига высшая (полуфиналы).

IV тур. 1.10.2015 г.

1. Есть 13 внешне одинаковых монет. Суд знает, что их веса 1г, 2г, …, 13 г. Эксперт знает точный вес каждой монеты. У него есть весы с двумя чашками, которые показывают равновесие (загорается лампочка) или неравновесие, но не показывают, какая чаша тяжелее. Можно ли провести 3 взвешивания на таких весах так, чтобы суду стал ясен вес каждой из монет?

2. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка P так, что $\angle PAC=\angle PBC$. Пусть L и N — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC и AC, соответственно, D — середина AB. Докажите, что $DL=DN$.

3. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 100. Петя и Вася играют, начинает Петя. Каждым ходом надо стереть восемь чисел с суммой 404. Кто не может сделать ход, проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. Решите в натуральных числах уравнение:

$$x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - x^2z^2 = 2015.$$

5. В ряд лежат куски сыра. Если веса соседей не равны, то отношение большего к меньшему не превосходит 4. Разрешено все или некоторые куски разрезать на 2 части. Докажите, что можно разрезать и выложить все куски в ряд так, чтобы в каждой паре отношение большего к меньшему не превосходило 2.

6. От однокругового футбольного турнира осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Взглянув на неё, математик определил, что в турнире не было ничьих. Какое наибольшее число команд могло участвовать в турнире?

7. На плоскости отмечены 74 точки. Если выкинуть любую точку, то остальные можно зачеркнуть восемью прямыми. Докажите, что все точки можно зачеркнуть восемью прямыми.

8. Сумма положительных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3 \geq 2\left(\sqrt{\frac{1-a}{a}}+\sqrt{\frac{1-b}{b}}+\sqrt{\frac{1-c}{c}}\right)$$