XI Всероссийская смена «Юный математик». ВДЦ «Орлёнок»

X Южный математический турнир.

Старт-лига. Финал. 2 октября 2015 года.

Высшая лига (финал). Решения

1. Даны три бесконечные десятичные дроби, получающиеся друг из друга переносом запятой. Цифра справа от запятой во всех числах разная. Может ли сумма этих чисел быть равной 777? (А.Шаповалов)

Решение. Может. Пусть $x=777/1011=0,7685\dots$. Тогда достаточно взять x , $10x=7,685\dots$ и $1000x=768,5\dots$

2. Сумма $2k$ различных натуральных слагаемых равна $6k^2$. Докажите, что можно подчеркнуть несколько слагаемых (не менее двух) так, чтобы сумма подчеркнутых чисел делилась на одно из них.

(А.Шаповалов)

Решение. Пусть наименьшее слагаемое равно m . Подчеркиваем его и, если не оговорено противное, ещё кратную m сумму. Известна лемма: из m целых чисел можно выбрать одно или несколько с суммой, кратной m .

Так как наименьшая сумма $2k$ различных слагаемых, больших $2k$, не меньше чем

$(2k+1)+(2k+2)+\dots+4k=((2k+1)+4k)2k/2>6k^2$, то $m\leq 2k$. Если $m<2k$, то подчеркнем по лемме. При $m=2k$ можно подчеркнуть все числа, так как $6k^2$ кратно $2k$.

3. У правильного 100-угольника выбрали 51 вершину. Докажите, что какие-то три выбранные точки являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника. (фольклор).

Решение. Разобьем все вершины на четверки, так чтобы между соседними вершинами в четверке было ровно по 25 сторон. Вершины каждой четвёрки – это вершины квадрата. Получится 25 четвёрок. По принципу Дирихле в какой-то четвёрке отмечены не менее трёх точек. Они и лежат в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника.

4. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и равными наименьшими сторонами? (А.Шаповалов)

Решение. Не верно. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами 98, 100 и 102. Его можно разрезать либо на два треугольника (прямой, проходящей через вершину), либо на треугольник и четырехугольник. Будем доказывать, что если периметры частей равны, то наименьшие стороны не равны.

Случай 1. Разбиваем на два треугольника. Пусть разбивающая прямая проходит через вершину A и пересекает противоположную сторону в точке D. Можно считать, что $AB<AC$. Так как $AB+BD=AC+CD$ и $AB<AC$, то $BD>CD$. Отрезок $CD<BC/2\leq 102/2=51$. Стороны AB и AC больше 51. Докажем, что и общая сторона $AD>51$. Для этого найдем на стороне AC такую точку B', что $AB=AB'$. Отрезок AD больше его части, попавшей внутрь равнобедренного треугольника ABB' , а эта часть больше высоты AH в ABB' . Оценим AH снизу. Боковые стороны ABB' не меньше 98. По неравенству треугольника $BB'<BC-SB'\leq 102-2=100$. Тогда по теореме Пифагора $AH^2=AB^2-(BB'/2)^2\geq 98^2-50^2=(98-50)(98+50)>6^2\cdot 12^2=72^2$, то есть $AD>AH>72>51$. Итак, в этом случае CD – наименьший отрезок в треугольнике ACD, и он не равен никакой стороне треугольника ABD.

Случай 2. Разбиваем на треугольник и четырехугольник. Пусть разбивающая прямая проходит через точки M и N на сторонах AB и AC соответственно. Ввиду равенства периметров $BM+BC+CN=150$, откуда $BM+CN\leq 52$, и наименьший из этих отрезков, скажем $BM\leq 26$. Докажем, что BM – наименьшая сторона в четырехугольнике BMNC. Мы уже знаем, что $BM<BC$ и $BM\leq NC$. Сравним BM с MN. По нервенству треугольника $BM+MN+NC>BC$, поэтому $MN>BC-(BM+NC)\geq 98-52=46>BM$. Итак, BM – действительно наименьшая сторона. Докажем, что BM не равен ни одной из сторон треугольника AMN. $AM=AB-BM\geq 98-26=72>BM$. $AN=AC-NC>AC-(BM+NC)\geq 98-52=46>BM$.

5. В центральной клетке нижнего ряда доски 2×2015 лежат 2015 зёрен, остальные клетки – пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить с клетки одно или несколько зёрен (но не все) в соседнюю пустую. Кто не сможет сделать хода – проиграл. Кто из игроков может выигрывать, как бы ни играл соперник? (А.Шаповалов)

k	m
k+1	m

Решение. Выигрывает Петя. Обозначим A изначальную клетку с $2015=2n+1$ зёрнами. Первым ходом Петя переложит n зёрен в соседнюю сверху клетку B. На любой ход Васи

Петя отвечает ходом в ту же сторону в другой горизонтали так, чтобы образовался квадрат из 4 заполненных клеток вида

где $k > 1$ (столбец из равных клеток может быть и слева). Назовем позицию после хода Пети *хорошей*, если занятые клетки образуют прямоугольник, с одной стороны ограниченный *равным* столбцом (из двух клеток с равным числом зёрен), а с другой – *полуравным* столбцом (где число зерен в клетках отличается на 1, и в меньшей клетке число зёрен $k > 1$). Итак, вторым ходом Петя создает хорошую позицию. Если Вася сходит из равного столбца, то Петя повторит его ход из другой клетки этого столбца и снова получит хорошую позицию.

Для хода Васи из полуравного столбца есть 3 варианта.

1) Если Вася переложит четное число зерен, то Петя переложит половину этих зёрен по вертикали и получит *отличный* прямоугольник из заполненных клеток (ограниченный с обеих сторон равными столбцами). Далее Петя выиграет, просто повторяя ходы Васи из того же столбца.

2) Если Вася переложит меньше чем k зёрен, то Петя переложит такое же число зёрен из того же столбца, получит отличный прямоугольник и выиграет.

3) Вася переложит k зёрен (из клетки с $k+1$ зерном), при этом k – нечётно. Петя в ответ должен переложить $k-1$ зерно из другой клетки того же столбца. Заметим, что так как $k > 1$ и нечётно, то $k \geq 3$. Значит, $k-1 \geq 2$, поэтому снова получится хорошая позиция, но ход типа 3 теперь невозможен. Значит, следующий ход будет типа 1 или 2, Петя получит отличный прямоугольник и выиграет.

6. В каждой передаче «Своя игра» участвует 3 знатока. В прошлом году для проведения цикла передач отобрали n участников. Удалось провести игры так, что каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре. В этом году отобрали $3n$ участников. Могло ли оказаться так, что через несколько дней каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре? (С.Волченков)

Решение. Могло. Разделим знатоков этого года на три группы по n человек. Припишем каждой группе свой цвет, и занумеруем в ней участников от 1 до n . У нас есть прошлогодние тройки номеров. Для каждой такой тройки сделаем по 9 новых троек: 3 тройки, когда все номера относятся к одноцветным участникам, и 6 троек, когда участники с данными номерами – трех разных цветов. Кроме того, добавим ещё n троек, когда номера участников одинаковы, но они – трёх разных цветов.

Докажем, что каждый с каждым встретится ровно один раз. Пусть есть два участника M и N с номерами m и n соответственно.

Случай 1: $m < n$. В прошлом году участники с такими номерами входили ровно в одну тройку (k, m, n) . Если M и N – разного цвета, то они встретятся в разноцветной тройке (k, m, n) , причем цвет k определяется однозначно: он отличается от цветов M и N . Если M и N – одинакового цвета, то они встретятся в одноцветной тройке (k, m, n) , причем цвет k определяется однозначно: он совпадает с цветами M и N .

Случай 2. $m = n$. Тогда M и N – разного цвета. Они встретятся в разноцветной тройке (m, m, m) .

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса AD . На основании отмечена точка E , что $AE = BD$, на стороне AC – точка F такая, что $AF = AB$. Докажите, что точка пересечения AD и EF лежит на высоте треугольника ABC . (Д.Калинин)

Решение. Пусть H – указанная точка пересечения. Точка F симметрична B относительно биссектрисы AD , поэтому $FD = BD = AE$ и $\angle AFD = \angle ABD = \angle FAE$. Треугольники AFD и FAE равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle AFE = \angle DAF$, то есть треугольник AHF – равнобедренный. Симметричный ему относительно AD треугольник AHB тоже равнобедренный, значит, точка H лежит на серединном перпендикуляре к стороне AB . А это и есть высота треугольника ABC .

8. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z) таких, что $xy + yz + xz - xyz = 2$.

Решение. *Ответ.* $(1, 1, 1)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 4, 3)$, $(3, 2, 4)$, $(3, 4, 2)$, $(4, 2, 3)$, $(4, 3, 2)$.

Так как x, y, z входят в уравнение симметрично, достаточно рассмотреть случай $x \leq y \leq z$. Тогда $xy \leq xz \leq yz$, и $2 \leq 3yz - xyz = (3-x)yz$. Отсюда $3-x > 0$. Так как x – натурально, то $x=1$ или $x=2$. При $x=1$ уравнение превращается в $y+z=2$, откуда $y=z=1$. При $x=2$ уравнение превращается в $2y+2z-yz=2 \Leftrightarrow yz-2y-2z+2=4 \Leftrightarrow (y-2)(z-2)=2$, откуда $y-2=1, z-2=2$ и $x=2, y=3, z=4$.