

Финальный бой

2 октября

1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , A_0 — основание высоты из вершины A , X — точка на луче AA_0 . Биссектриса угла BAC пересекает вторично описанную окружность треугольника ABC в точке D . Пусть M — середина отрезка DX . Прямая, проходящая через O и параллельная AD , пересекает DX в точке N . Докажите, что $\angle BAM = \angle CAN$.

2. Верно ли следующее утверждение: «объем любого восьмигранника, описанного около сферы радиуса 1, не меньше $4\sqrt{3}$ »?

3. Вписанная окружность треугольника ABC имеет центр I и касается сторон BC , CA , AB в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает окружность, описанную около треугольника ABC , в точках P и Q . Пусть A_2 — центр окружности, описанной около треугольника A_1PQ . Точки B_2 , C_2 определяются аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны.

4. Правильный шестиугольник со стороной n разбит на правильные треугольники со стороной 1. Вершины правильных треугольников, находящиеся внутри шестиугольника, покрашены красным, а вершины правильных треугольников на границе шестиугольника покрашены синим. Для каждой красной вершины A на четырех из шести выходящих из нее единичных отрезков ставим стрелку, выходящую из A (тем самым на единичном отрезке может не быть стрелок, может быть стрелка в одном направлении или стрелки в двух направлениях). Найдите наименьшее k такое, что при любой расстановке стрелок из центра шестиугольника есть путь длины не превосходящей k по стрелкам до некоторой синей вершины.

5. Дан граф, не содержащий полного подграфа на 5 вершинах, который нельзя правильно окрасить в 4 цвета (красятся вершины). Докажите, что его вершины можно разбить на 2 подмножества так, что подграф на первом подмножестве нельзя правильно окрасить в 3 цвета, а подграф на втором множестве нельзя правильно окрасить в 1 цвет.

6. Пусть b и k — натуральные числа, $b > k$. В b -ичной записи взяли множество k -значных чисел без нулей в записи, у которых цифры строго монотонно возрастают. Найдите сумму всех таких чисел.

7. Дано простое число p . По окружности стоит p целых чисел. За один ход нужно выбрать некое целое число k и сменить имеющийся набор $a_0, \dots, a_{p-1}$ на набор чисел $a_0 - a_k, a_1 - a_{1+k}, \dots, a_{p-1} - a_{p-1+k}$ (индексы берутся по модулю p , то есть $a_i = a_{i-p}$). Найдите все пары натуральных чисел (m, n) , $n > 1$, для которых верно следующее утверждение: для любого начального набора p целых чисел после выполнения любых m описанных ходов получится набор из p чисел, кратных n .

8. Дана последовательность $a_1 = 1, a_2 = 2^2, a_3 = 3^3, \dots$. Пусть b — натуральное число и b_i — остаток a_i по модулю b . Докажите, что b -ичная дробь $0, b_1 b_2 b_3 \dots$ равна рациональному числу.

9. На клетчатой плоскости отмечены узлы клетчатого прямоугольника 50×100 (всего отмечено 51×101 узлов). Множество параллельных прямых называется *удачным*, если на каждой из прямых этого множества лежит хотя бы один отмеченный узел и каждый отмеченный узел лежит на прямой этого множества. Дано удачное множество из 3034 прямых параллельных некоторой прямой l . Найдите мощность удачного множества прямых, перпендикулярных l .

10. Для данного натурального $n \geq 4$ рассматриваются точки $A_1, \dots, A_n$, лежащие на одной окружности. Пусть d_i равно произведению расстояний от A_i до остальных точек A_j . Могло ли случиться, что $d_1, \dots, d_n$ — это n подряд идущих натуральных чисел (взятых в некотором порядке)?