

Десятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 26.09.-02.10.2015

Финал. Премьер-лига. 2 октября 2015 г.

1. На каждом поле доски 2015×2015 стоит фишка. За один ход все фишки одновременно сдвигаются на соседнее по диагонали поле (несколько фишек могут попасть на одну и ту же клетку). На каком наименьшем количестве клеток можно собрать все фишки за несколько ходов?

2. $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, в котором $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ и $AB = BC$. Докажите, что $CD = DA$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $x(x+1) = y(y+1)(y^2+1)$.

4. Пусть две окружности пересекаются в точках A и B . Их общая касательная касается их в точках M и N . Оказалось, что $\angle AMN = 90^\circ$, а $MN = 2AM$. Чему может быть равен угол BMN ?

5. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: если числа a и b – рациональные, а числа $a+b$ и a^n+b^n – целые, то a и b – целые?

6. При каком наибольшем C неравенство $x^2 + y^2 + xy + 1 \geq C(x+y)$ выполняется для всех вещественных x и y ?

7. Найдите все простые p , для которых $(p-2)!-1$ является степенью числа p с натуральным показателем.

8. У правильного 100-угольника выбрали 51 вершину. Докажите, что какие-то три выбранные точки являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

Десятый Южный математический турнир

ВДЦ “Орлёнок”, 26.09.-02.10.2015

Финал. Премьер-лига. 2 октября 2015 г.

1. На каждом поле доски 2015×2015 стоит фишка. За один ход все фишки одновременно сдвигаются на соседнее по диагонали поле (несколько фишек могут попасть на одну и ту же клетку). На каком наименьшем количестве клеток можно собрать все фишки за несколько ходов?

2. $ABCD$ – выпуклый четырёхугольник, в котором $\angle CBD = 2\angle ADB$, $\angle ABD = 2\angle CDB$ и $AB = BC$. Докажите, что $CD = DA$.

3. Решите в натуральных числах уравнение $x(x+1) = y(y+1)(y^2+1)$.

4. Пусть две окружности пересекаются в точках A и B . Их общая касательная касается их в точках M и N . Оказалось, что $\angle AMN = 90^\circ$, а $MN = 2AM$. Чему может быть равен угол BMN ?

5. Для каких натуральных n верно следующее утверждение: если числа a и b – рациональные, а числа $a+b$ и a^n+b^n – целые, то a и b – целые?

6. При каком наибольшем C неравенство $x^2 + y^2 + xy + 1 \geq C(x+y)$ выполняется для всех вещественных x и y ?

7. Найдите все простые p , для которых $(p-2)!-1$ является степенью числа p с натуральным показателем.

8. У правильного 100-угольника выбрали 51 вершину. Докажите, что какие-то три выбранные точки являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.