Десятый южный математический турнир

Старт-лига. ФИНАЛ.

02.10.2015

1. Даны три бесконечные десятичные дроби, получающиеся друг из друга переносом запятой. Цифра справа от запятой во всех числах разная. Может ли сумма этих чисел быть равной 777?

2. Сумма $2k$ различных натуральных слагаемых равна $6k^2$. Докажите, что можно подчеркнуть несколько слагаемых (не менее двух) так, чтобы сумма подчеркнутых чисел делилась на одно из них.

3. У правильного 100-угольника выбрали 51 вершину. Докажите, что какие-то три выбранные точки являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника.

4. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник можно по прямой разрезать на два меньших многоугольника с равными периметрами и равными наименьшими сторонами?

5. В центральной клетке нижнего ряда доски 2×2015 лежат 2015 зёрен, остальные клетки – пустые. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход можно переложить с клетки одно или несколько зёрен (но не все) в соседнюю пустую. Кто не сможет сделать хода – проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

6. В каждой передаче «Своя игра» участвует 3 знатока. В прошлом году для проведения цикла передач отобрали n участников. В результате удалось провести игры так, что каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре. В этом году отобрали $3n$ участников. Могло ли оказаться так, что через несколько дней каждый участник встретился с каждым ровно в одной игре?

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AC = BC$) проведена биссектриса AD. На основании отмечена точка E, что $AE = BD$, на стороне AC – точка F такая, что $AF = AB$. Докажите, что точка пересечения AD и EF лежит на высоте треугольника ABC.

8. Найдите все тройки натуральных чисел (x, y, z) таких, что

$$xy + yz + xz - xyz = 2.$$