Десятый южный математический турнир

Старт-лига

Командная олимпиада. 26.09.2015 г.

1. В XXII веке между Сочи и Краснодаром туда-сюда ходит круглосуточно один поезд «Стриж», делая на 5 минут остановку только в Туапсе. Время езды между городами всегда одно и то же, время стоянки в Краснодаре и Сочи – по полчаса, расписание каждый день одинаково. Рома съездил «Стрижом» на свидание из Сочи в Туапсе, и вернулся первым обратным «Стрижом», проведя в Туапсе ровно 80 минут. Аналогично, Юлия съездила из Краснодара в Туапсе, проведя там 90 минут (время считается от момента прибытия «Стрижа» до момента отправления обратного «Стрижа»). Сколько рейсов туда-обратно совершает «Стриж» за сутки?

2. В лагерь приехало 100 детей, причём у каждого из них ровно трое знакомых. 67 детей отправились в поход. Докажите, что есть ребёнок, у которого все трое знакомых отправились в поход.

3. К левому берегу реки подошли 99 полицейских, а к правому – 100 беженцев. Всем нужно на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка. Беженцы категорически отказываются быть в меньшинстве на одном берегу с полицейскими. Как им всем переправиться?

4. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки K и L так, что $BC=BL$ и

$$\angle ABK = \angle KBL = \angle LBC$$

На стороне AB отмечена точка M такая, что $BM=BK$. Докажите неравенство: $AM+LC>AK$.

5. Петя и Вася по очереди ломают палку: сначала Петя – на две части (можно неравные), потом Вася – одну из частей на две, затем Петя – одну из трех частей на две, и т.д. Вася выиграет, если сможет после своего хода выбрать из всех частей четыре штуки, чьи длины равны a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ (для каких-нибудь $a>0$ и $d\geq 0$). Может ли Петя ему помешать?

6. Шахматный король прошелся по доске $n\times n$. Стартовав из левой нижней клетки он сделал n ходов. Каждый ход был вправо, вверх или вправо-вверх по диагонали. Найдите число возможных маршрутов.

7. Даны четыре треугольника. Известно, что из любых трех можно сложить треугольник без дыр и перекрытий. Обязательно ли все четыре исходных треугольника равны между собой?

8. Найдите все такие натуральные m и n, для которых обе дроби $(m^3n-1)/(m+1)$ и $(n^3m+1)/(n-1)$ – нецелые, но их сумма и разность – целые.