

Командная олимпиада

26 сентября

1. В лагерь приехало 100 детей, причём у каждого из них ровно трое знакомых. 67 детей отправились в поход. Докажите, что есть ребёнок, у которого все трое знакомых отправились в поход.

2. Числа x^3 и $x^2 + x$ рациональны. Докажите, что число x также рационально.

3. AD — высота остроугольного треугольника ABC , а O — центр его описанной окружности. Прямая AO пересекает сторону BC в точке E . Точки M и N симметричны D относительно прямых AC и AB соответственно. Докажите, что $\angle EMC = \angle ENB$.

4. Петя и Вася по очереди ломают палку: сначала Петя — на две части (не обязательно равные), потом Вася — одну из частей на две, затем Петя — одну из трех частей на две, и т.д. Вася выиграет, если сможет после своего хода выбрать из всех частей четыре штуки, чьи длины равны a , $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$ (для каких-нибудь $a > 0$ и $d \geq 0$). Может ли Петя ему помешать?

5. Для положительных чисел a, b, c выполняются условия: $a \geq bc^2$, $b \geq ca^2$, $c \geq ab^2$. Найдите максимальное значение выражения

$$abc(a - bc^2)(b - ca^2)(c - ab^2).$$

6. На стороне AC треугольника ABC выбраны точки K и L так, что $\angle ABK = \angle KBL = \angle LBC$. На отрезке AB отмечена точка M такая, что $BM = BK$. Докажите неравенство $AM + LC > AK$.

7. Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n^2 + 1$ не кратно никакому квадрату натурального числа, большего 1.

8. На горизонтальной прямой отмечены $4n$ точек на равных расстояниях друг от друга. Вася соединяет их в верхней полуплоскости $2n$ непересекающимися полуокружностями так, что каждая отмеченная точка — конец ровно одной полуокружности. В нижней полуплоскости он проделывает такую же процедуру. В результате у него получается рисунок, состоящий из нескольких замкнутых кривых. Докажите, что возможных рисунков с нечётным числом кривых — ровно половина от общего числа.