

Одиннадцатый Южный математический турнир

ВДЦ «Орлёнок», 20–26.09.2016

Командная олимпиада. 20.09.2016

Команды 9–11 классов.

1. На острове, где живут рыцари, говорящие только правду, и лжецы, говорящие только ложь, собралась компания. Каждый произнес одну и ту же фразу: «В этой компании, не считая меня, не больше 10 рыцарей и не больше 5 лжецов». Сколько рыцарей могло быть в компании?

2. вещественные числа x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2y^2 + x^2 - 10xy - 8x + 16 = 0.$$

Какие значения может принимать произведение xy ?

3. Дан остроугольный треугольник ABC . Пусть M — середина BC , а P — основание высоты, опущенной из точки A . На дуге BC описанной окружности, не содержащей точки A , выбрана точка N так, что $\angle NAC = \angle BAM$. Точки R и S — середины отрезков AM и AN соответственно. Докажите, что точки P , R и S лежат на одной прямой.

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b такие, что

$$a + b = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}.$$

5. В одном городе много геометрических кружков, каждые два кружка имеют хотя бы одного общего человека. Докажите, что можно каждому жителю города дать линейку либо циркуль, и лишь одному одному жителю дать и то и другое так, чтобы в каждом кружке были и циркуль, и линейка.

6. Найдите все многочлены $P(x)$ с целыми коэффициентами такие, что существует бесконечно много натуральных n , при которых число $P(P(n) + n)$ простое.

7. Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка P . Прямые AP , BP , CP вторично пересекают окружность, описанную около треугольника, в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно. Точки A_2 , B_2 , C_2 симметричны точке P относительно сторон BC , CA , AB соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников PA_1A_2 , PB_1B_2 и PC_1C_2 , имеют общую точку, отличную от P .

8. В стране между некоторыми парами городов установлено *одностороннее* беспересадочное авиасообщение. Два вредителя хотят добиться того, чтобы, вылетев из любого города, нельзя было вернуться в него. Первый вредитель умел закрывать рейсы. Он выяснил, что можно закрыть 1000 рейсов, добившись требуемого, но меньшего числа рейсов недостаточно; однако до начала действий его обнаружили и обезвредили. Второй вредитель умеет разворачивать направления рейсов. Какого минимального количества разворачиваний ему гарантированно хватит?