Лига Старт. Командная олимпиада

19 сентября

1. Петя хочет составить свой словарь. Для этого он берет слово ЛОДКА и всеми способами переставляет в нем буквы. Полученные слова он пишет в словарь как положено, в алфавитном порядке. Например, первое слово, которое напишет Петя — АДКЛО. Каким по счету будет выписано слово ЛОДКА?

2. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B = 60^\circ$. Кроме того, $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AC = BD$.

3. Вася подкидывает монетку и считает, в какой части случаев выпадает орёл. После очередного броска отношение количества выпавших орлов ко всем броскам было меньше $3/4$, а через некоторое время — больше. Верно ли, что в какой-то момент это отношение равнялось $3/4$?

4. Доска 20×20 покрашена в два цвета: нечетные столбцы в черный цвет, четные — в белый. На всех черных клетках стоит по одному белому королю. Каждым ходом один из королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

5. Дан треугольник ABC с $\angle C = 90^\circ$. Пусть точки D и E на гипотенузе AB таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Пусть точки P и Q на отрезках AC и BC соответственно таковы, что $AP = AE$ и $BQ = BD$. Обозначим через M середину отрезка PQ. Докажите, что M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

6. Пусть n — натуральное число. Докажите, что если $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно 6 натуральных делителей, то $n^3 - n + 1$ — точный квадрат.

7. Среди 300 участников олимпиады некоторые знакомы друг с другом. Известно, что нет трех попарно знакомых. Кроме того, для некоторого k выполнены условия: нет участника, у которого более k знакомых; для каждого натурального числа m от 1 до k найдется участник, у которого ровно m знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

Лига Старт. Командная олимпиада

19 сентября

1. Петя хочет составить свой словарь. Для этого он берет слово ЛОДКА и всеми способами переставляет в нем буквы. Полученные слова он пишет в словарь как положено, в алфавитном порядке. Например, первое слово, которое напишет Петя — АДКЛО. Каким по счету будет выписано слово ЛОДКА?

2. Про выпуклый четырехугольник $ABCD$ известно, что $\angle A = \angle B = 60°$. Кроме того, $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AC = BD$.

3. Вася подкидывает монетку и считает, в какой части случаев выпадает орёл. После очередного броска отношение количества выпавших орлов ко всем броскам было меньше $3/4$, а через некоторое время — больше. Верно ли, что в какой-то момент это отношение равнялось $3/4$?

4. Доска 20×20 покрашена в два цвета: нечетные столбцы в черный цвет, четные — в белый. На всех черных клетках стоит по одному белому королю. Каждым ходом один из королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

5. Дан треугольник ABC с $\angle C = 90°$. Пусть точки D и E на гипотенузе AB таковы, что $AD = AC$ и $BE = BC$. Пусть точки P и Q на отрезках AC и BC соответственно таковы, что $AP = AE$ и $BQ = BD$. Обозначим через M середину отрезка PQ. Докажите, что M — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

6. Пусть n — натуральное число. Докажите, что если $n^5 + n^4 + 1$ имеет ровно 6 натуральных делителей, то $n^3 - n + 1$ — точный квадрат.

7. Среди 300 участников олимпиады некоторые знакомы друг с другом. Известно, что нет трех попарно знакомых. Кроме того, для некоторого k выполнены условия: нет участника, у которого более k знакомых; для каждого натурального числа m от 1 до k найдется участник, у которого ровно m знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.