Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017

КОМАНДНАЯ ОЛИМПИАДА. СТАРШИЕ

1. Точки A и B расположены на единичном расстоянии друг от друга. Окружности S_A и S_B единичного радиуса с центрами в A и B соответственно пересекаются в точках C и D. Окружность с центром C, проходящая через точку D, пересекает луч CA в точке F. Луч DF пересекает окружность S_A в точке G. Найдите угол AGB.

2. На доске написаны пять попарно различных положительных чисел. Для каждой пары написанных чисел вычислили их сумму. У какого наибольшего количества пар эта сумма может найтись среди написанных на доске чисел?

3. Доска 20×20 покрашена в два цвета: нечетные столбцы в черный цвет, четные — в белый. На всех черных клетках стоит по одному королю. Каждым ходом один из королей сдвигается на свободную соседнюю по стороне или диагонали клетку. За какое наименьшее число ходов все короли могут снова встать на черные клетки, причем так, что ни один король не окажется в клетке, в которой стоял изначально?

4. Пусть n — натуральное число. Докажите, что если n^5+n^4+1 имеет ровно 6 натуральных делителей, то n^3-n+1 — точный квадрат.

5. По окружности расставлены 100 натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_{100}. С этим набором из 100 чисел производятся следующие операции. За одну операцию одновременно каждое число a_i заменяется на число $b_i = \lceil \sqrt{a_i a_{i+1}} \rceil$ (здесь полагаем $a_{101} = a_1$). Докажите, что после нескольких операций все 100 чисел на окружности окажутся равными. (Через $\lceil x \rceil$ обозначается наименьшее целое число, большее или равное числу x.)

6. Среди 300 участников олимпиады некоторые знакомы друг с другом. Известно, что нет трех попарно знакомых. Кроме того, для некоторого k выполнены условия: нет участника, у которого более k знакомых; для каждого $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ найдется участник, у которого ровно m знакомых. Найдите наибольшее возможное значение k.

7. Внутри треугольника ABC выбрана точка D. На лучах BD и CD вне треугольника выбраны точки X и Y соответственно таким образом, что $\angle XCA = \angle DAB$ и $\angle YBA = \angle DAC$. Докажите, что точка D лежит на прямой, проходящей через центры описанных окружностей треугольников AYB и AXC.

8. Дано натуральное число n. Известно, что существует набор из n чисел такой, что его нельзя разбить на несколько поднаборов с суммой n, а если продублировать все числа этого набора (получив набор из $2n$ чисел), то такое разбиение станет возможно. Верно ли, что число n чётно?