

Группа Старт. Высшая лига. Тур 1

20 сентября

1. Найдите наименьшее простое число p , сумма цифр которого — нечетное составное число.

2. Прямоугольник 42×44 разрезан на несколько прямоугольников 1×8 и две связанные фигурки из 4 клеток. Докажите, что эти фигурки равны.

3. Дано натуральное число $n > 10$. Министры Петя и Вася играют в игру. У них есть карта с n городами. В начале Петя соединяет их $k \geq n$ дорогами, причем так, чтобы от любого города по дорогам можно было доехать до любого другого. Любые два города можно соединить не более чем одной дорогой. Затем Петя отмечает два города A и B и помещает в город A фишку. Далее каждым своим ходом Вася перемещает фишку в город, куда от текущего положения фишки можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Петя же своим ходом разрушает одну дорогу. Если Вася в некоторый момент оказывается в городе B , то он побеждает. Иначе выигрывает Петя. При каком наибольшем k Петя может выиграть, как бы ни играл Вася?

4. Саша хочет отметить на плоскости n точек и раскрасить их в несколько цветов. При этом все расстояния между точками должны быть попарно различны. А для каждой отмеченной точки P две самые удаленные из отмеченных точек должны быть одного цвета. Какое наибольшее число цветов Петя сможет использовать хотя бы по разу?

5. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом A проведена высота AH . В треугольнике AHC проведена высота HK . Оказалось, что $KC = AH$. Докажите, что BK — биссектриса угла ABC .

6. Дан квадрат $ABCD$ с центром O . Вне квадрата на отрезках BC и CD как на основаниях построены два равных равнобедренных треугольника BCJ и CDK . Пусть M — середина CJ . Докажите, что отрезки OM и BK перпендикулярны.

7. В числовой последовательности $a_1, a_2, \dots, a_{1000000}$, состоящей из целых неотрицательных чисел, сумма любых 100 подряд идущих чисел равна 2017. Натуральное число $k \leq 1000000$ называется *хорошим*, если $a_k = k$. Каково наибольшее возможное количество хороших чисел?

8. Сумма вещественных чисел a, b, c и d равна 0. Обозначим суммы $N = ab + bc + cd$ и $K = ac + ad + bd$. Докажите, что хотя бы одна из сумм $20N + 17K$ и $17N + 20K$ не положительна.