Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2017
Юниор-лига. 1 тур. 20.09.17

1. Для какого наибольшего натурального n существует единственное натуральное k такое, что
$$\frac{10}{11} < \frac{n}{k+n} < \frac{11}{12}\ ?$$

2. В стране $n > 10$ городов. Министры Петя и Вася играют в игру. В начале Петя соединяет города k дорогами так, чтобы от любого города по этим дорогам можно было доехать до любого другого. Любые два города можно соединить не более чем одной дорогой. Затем Петя отмечает два города A и B и помещает в город A фишку. Далее каждым своим ходом Вася перемещает фишку в город, куда от текущего положения фишки можно добраться, проехав не более чем по двум дорогам. Петя же своим ходом разрушает одну дорогу. Если Вася в некоторый момент оказывается в городе B, то он побеждает. Иначе выигрывает Петя. При каком наибольшем k Петя может выиграть, как бы ни играл Вася?

3. Сколькими способами можно разбить прямоугольник 4×100 на Т-тетрамино?

4. Даны простое число $p > 2$ и натуральные числа $x, y \leqslant \frac{p-1}{2}$. Докажите, что если $x(p-x)y(p-y)$ – точный квадрат, то $x = y$.

5. Дана конечная строчка из нулей и единиц, оканчивающаяся нулем. Докажите, что можно расставить плюсы между некоторыми цифрами так, чтобы полученная сумма, вычисленная как сумма чисел в двоичной системе счисления (числа могут начинаться с нуля), равнялась $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^n\right]$ для некоторого натурального n.

6. Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Вне квадрата на отрезках BC и CD как на основаниях построены два равных равнобедренных треугольника BCJ и CDK. Пусть M — середина CJ. Докажите, что отрезки OM и BK перпендикулярны.

7. Точка I – центр вписанной окружности неравнобедренного треугольника ABC с углом $\angle A = 60^\circ$. Точки E и F – основания биссектрис углов $\angle ABC$ и $\angle ACB$ соответственно. Различные точки P и Q таковы, что треугольники PEF и QEF равносторонние. Докажите, что $OI \perp BC$, где O — центр описанной окружности треугольника APQ.

8. Сумма вещественных чисел a, b, c и d равна 0. Обозначим суммы $N = ab + bc + cd$ и $K = ac + ad + bd$. Докажите, что хотя бы одна из сумм $20N + 17K$ и $17N + 20K$ не положительна.