Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017

Гранд-лига. 2 тур. 21.09.17

1. Для положительных x, y, z докажите неравенство

$$3(x^2 + y + z)(x + y^2 + z)(x + y + z^2) \geqslant (x + y + z)^4.$$

2. Пусть n — составное число. Числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ — все числа из множества $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, не взаимно простые с n. Пусть $b_1, \ldots, b_k$ — перестановка чисел $a_1, \ldots, a_k$. Докажите, что найдутся индексы i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ такие, что $a_i b_i$ и $a_j b_j$ дают одинаковые остатки при делении на n.

3. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_a, BH_b, CH_c. Точки X и Y — проекции H_a на AB и AC соответственно, Z — проекция H_b на BC. Докажите, что прямые XY, H_cZ и AH_a пересекаются в одной точке.

4. Дано натуральное n. Рассматривается граф на n вершинах, на каждом ребре которого выбрано направление (стрелка). За один ход можно выполнить операцию «обращение стрелки»: выбрать некоторое ребро и изменить на нем направление стрелки на противоположное. За какое наименьшее количество операций для любого графа и любого начального выбора направлений на ребрах можно с гарантией получить граф, в которм нет ориентированного цикла (т.е. циклического маршрута, который можно пройти по стрелкам)?

5. Даны различные натуральные числа m и n. В одной из клеток бесконечной шахматной доски стоит (m, n)-конь, то есть фигура, которая при каждом своём ходе передвигается на m клеток по вертикали и n клеток по горизонтали или на n клеток по вертикали и m клеток по горизонтали. Докажите, что он не может попасть на соседнюю (по стороне) клетку менее, чем за $m + n$ ходов.

6. Пусть $d(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Докажите, что

$$n + d(1) + d(2) + \cdots + d(n) \leqslant d(n+1) + d(n+2) + \cdots + d(2n).$$

7. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие для всех вещественных x, y, z равенству

$$(x - y)f(x + y) + (y - z)f(y + z) + (z - x)f(z + x) = 0.$$

8. Клетки таблицы $2n \times 2n$ разбиты на пары. Столбцы и строки таблицы занумерованы по порядку слева направо и сверху вниз числами $1, 2, \ldots, 2n$. Скажем, что клетка имеет координаты (i, j), если она находится в i-й строке и j-м столбце. Расстоянием между клетками с координатами (i, j) и (k, l) назовем величину $|i - k| + |j - l|$. Найдите максимальное возможное значение суммы расстояний между клетками по всем парам.

9. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На стороне BC взята точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E так, что $BD/DC = BE/EC$. Пусть T — проекция точки D на прямую IE. Докажите, что $\angle ATE = \angle IDE$.

10. Для 100 точек общего положения на плоскости (никакие 3 точки не лежат на одной прямой) требуется провести k прямых, не проходящих ни через одну из них так, чтобы в каждой части плоскости, на которые прямые делят плоскость, оказалось не более одной данной точки. Какого наименьшего k будет достаточно, чтобы это можно было сделать при любом расположении точек?