Лига «Премьер». 2 тур. 21 сентября.

1. Будем говорить, что одинаковые круглые монеты расположены ***правильно***, если выполнены следующие условия:

• монеты расположены в несколько рядов;

• монеты в каждом ряду образуют непрерывный блок (т.е. центры всех монет на одной прямой и соседние монеты касаются друг друга);

• монеты каждого следующего ряда касаются ровно двух монеток предыдущего.

Обозначим через $A(n)$ количество всех ***правильных*** расположений монет ровно с n монетами в первом ряду. Найдите наименьшее n, для которого $A(n)>10^4$.

2. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_a, BH_b, CH_c. Точки X и Y – проекции H_a на AB и AC соответственно, Z – проекция H_b на BC. Докажите, что прямые XY, H_cZ и AH_a пересекаются в одной точке.

3. Пусть $d(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Докажите, что

$$n+d(1)+d(2)+\ldots+d(n) \leq d(n+1)+d(n+2)+\ldots+d(2n).$$

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрали точку D. Описанная окружность треугольника ACD пересекла прямую AB в точке E, а описанная окружность треугольника BCD пересекла прямую AC в точке F. Докажите, что точки D, E и F лежат на одной прямой.

5. Внутри выпуклого 2017-угольника нашлась такая точка O, что все 2017 треугольников, образованных точкой O и парой соседних вершин, равны между собой. Верно ли, что исходный 2017-угольник правильный?

6. Каждое из 11 попарно пересекающихся множеств содержит ровно 5 элементов. При каком наименьшем k может оказаться, что пересечение каждых k из этих 11 множеств пусто?

7. Докажите, что если для острых углов α и β справедливо неравенство $\sin^2\alpha+\sin^2\beta\leq 1$, то выполняется и неравенство $\sin^2\alpha+\sin^2\beta\leq \sin(\alpha+\beta)$.

8. Даны различные натуральные числа m и n. В одной из клеток бесконечной шахматной доски стоит ***(m,n)-конь***, то есть фигура, которая при каждом своём ходе передвигается на m клеток по вертикали и n клеток по горизонтали или на n клеток по вертикали и m клеток по горизонтали. Докажите, что он не может попасть на соседнюю (по стороне) клетку менее, чем за $m+n$ ходов.