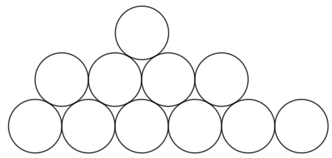
Группа Старт. Высшая лига. Тур 2

21 сентября

1. На день рождения к Волку пришли семеро козлят и Маша. После того, как Волк отвлекся, он недосчитался 3 пирожков. У Волка есть вместительные чашечные весы без гирь. Волк знает, что никто из козлят не успел бы съесть все три пирожка сразу. Как Волку за 7 взвешиваний определить, виновна ли в поедании пирожков Маша? Первоначально все козлята весили одинаково, а Маша может иметь другой вес.

2. Будем говорить, что одинаковые монеты расположены *правильно*, если выполнены следующие условия: монеты расположены в несколько рядов, ряды пронумерованы снизу вверх; монеты в каждом ряду образуют непрерывный блок; каждая монета во всех рядах, кроме первого, касается ровно двух монет предыдущего ряда. Обозначим через $A(n)$ количество всех правильных расположений монет ровно с n монетами в первом ряду. На рисунке приведен пример правильного расположения монет с 6 монетами в первом ряду. Найдите наименьшее n, для которого $A(n) > 10^4$.



3. На левом берегу реки собралось 15 человек, на правом — 25. Каждый человек хочет переправиться с одного берега на другой. Возле левого берега находится лодка, вмещающая двух или трех человек; одному человеку не хватит сил управиться с лодкой. Могут ли люди переправиться так, чтобы любые двое были в лодке вместе ровно один раз, а лодка оказалась после всех переправ на другом берегу?

4. Про различные действительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}.$$

Какие значения может принимать произведение xy?

5. В треугольнике ABC сторона AC короче стороны AB, а один из углов, на которые медиана AF делит угол A в два раза больше другого. Точка D на прямой AF такова, что $BD \perp AB$. Докажите, что $AD = 2AC$.

6. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такие, что

$$\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n = 0; \\ a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n > 0; \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\ldots+a_n^2x_n < 0. \end{cases}$$

7. На отрезке AB отмечена точка C. По разные стороны от AB построены равносторонние треугольники ABX и ACY. Обозначим через K и M середины отрезков YC и BX соответственно. Оказалось, что треугольник AMK — прямоугольный. В каком отношении точка C делит отрезок AB?

8. Обозначим через $d(n)$ количество натуральных делителей натурального числа n. Докажите, что для всех натуральных n выполнено неравенство

$$n+d(1)+d(2)+\ldots+d(n) \leqslant d(n+1)+d(n+2)+\ldots+d(2n).$$