Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2017
Юниор-лига. 2 тур. 21.09.17

1. Пусть $d(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Докажите, что

$$n + d(1) + d(2) + \ldots + d(n) \leqslant d(n+1) + d(n+2) + \ldots + d(2n).$$

2. На день рождения к Волку пришли семеро козлят и Маша. После того, как Волк отвлекся, он недосчитался 3 пирожков. У Волка есть вместительные чашечные весы без гирь. Волк знает, что никто из козлят не успел бы съесть все три пирожка сразу. Как Волку за 7 взвешиваний определить, виновна ли в поедании пирожков Маша? Первоначально все козлята весили одинаково, а Маша может иметь другой вес.

3. В последовательности натуральных чисел a_1, a_2, a_3, ... для всех натуральных n выполняется равенство $a_n \cdot a_{n+1} = a_{n+2} \cdot a_{n+3}$. Докажите, что эта последовательность чисто периодическая.

4. В треугольнике ABC точка F – середина стороны BC и $\angle FAC = 2\angle FAB$. Точка D на прямой AF такова, что $BD \perp AB$. Докажите, что $AD = 2AC$.

5. Даны различные натуральные числа m и n. В одной из клеток бесконечной клетчатой доски стоит (m, n)-*конь*, то есть фигура, которая при каждом своём ходе передвигается на m клеток по вертикали и n клеток по горизонтали или на n клеток по вертикали и m клеток по горизонтали. Докажите, что он не может попасть на соседнюю (по стороне) клетку менее, чем за $m + n$ ходов.

6. Внутри выпуклого 2017-угольника нашлась такая точка O, что все 2017 треугольников, образованных точкой O и парой соседних вершин, равны между собой. Верно ли, что исходный 2017-угольник правильный?

7. В остроугольном треугольнике ABC провели высоты AH_a, BH_b, CH_c. Точки X и Y – проекции H_a на AB и AC соответственно, Z – проекция H_b на BC. Докажите, что прямые XY, H_cZ и AH_a пересекаются в одной точке.

8. Каждое из 11 попарно пересекающихся множеств содержит ровно 5 элементов. При каком наименьшем k может оказаться, что пересечение каждых k из этих 11 множеств пусто?