Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017

Гранд-лига. 3 тур. 22.09.17

1. Пусть AD и BE — высоты остроугольного треугольника ABC. Прямая DE пересекает описанную окружность Ω треугольника ABC в точках P и Q так, что E лежит между P и D. Пусть биссектрисы углов APQ и BQP пересекают вторично Ω в точках K и L соответственно. Докажите, что KL перпендикулярна биссектрисе угла ACB.

2. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что для всех действительных x и y выполнено равенство
$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x)).$$

3. Найдите все пары натуральных чисел a, b такие, что
$$\text{НОК}(a, b + 2017) = \text{НОК}(b, a + 2017).$$

4. В неравнобедренном треугольнике ABC точка M — середина стороны BC, N — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC, I — центр вписанной окружности, I_a — центр вневписанной окружности напротив вершины A. Докажите, что точка, симметричная точке M относительно прямой II_a, лежит на описанной окружности треугольника NII_a.

5. На доске 9×9 отмечены несколько клеток. У какого наименьшего количества клеток доски может оказаться чётное число отмеченных соседей?

6. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют условию $abcd + ab + bc + cd + da = 5$. Докажите, что $a + b + c + d \geqslant 4$.

7. Найдите все натуральные числа $n > 2$, удовлетворяющие следующему условию. Для любых попарно различных натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ выполнено
$$(a_1^n + a_1a_2\ldots a_n,\ a_2^n + a_1a_2\ldots a_n,\ \ldots,\ a_n^n + a_1a_2\ldots a_n) \leqslant 2(a_1, \ldots, a_n)^n.$$
(Здесь через $(x, y, \ldots, z)$ обозначен НОД чисел $x, y, \ldots, z$.)

8. Два игрока, Первый и Второй, играют в следующую игру: они кладут на стол кучку из 2017 камней, дальше ходят по очереди. Начинает Первый. Первый может удалить 1 камень, после этого Второй может удалить 1 или 2 камня; после этого Первый может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т.д. На n-м ходу игрок может удалить от 1 до 2^{n-1} камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто может победить, как бы ни играл другой игрок?

9. Каждой точке X плоскости сопоставлено число $r(X) > 0$ так, что для любых точек X, Y выполнено $|r(X) - r(Y)| \leqslant |XY|/2$. Известно, что существует непустое множество точек A, обладающее следующим свойством: если даны произвольная точка Y и произвольная точка $X \in A$ такие, что $|XY| = r(X)$, то $Y \in A$. Докажите, что A совпадает со всей плоскостью.

10. Дан граф с m ребрами. Вершины графа раскрашиваются в три цвета — красный, синий и зеленый. Затем подсчитывается количество ребер, соединяющих пары красных точек, количество ребер, соединяющих пары синих точек, и количество ребер, соединяющих пары зеленых точек. Пусть эти количества равны r, b, g соответственно. Докажите, что существует раскраска вершин, для которой $3r + 2b + g \leqslant \dfrac{6m}{11}$.