Лига «Премьер». 3 тур. 22 сентября.

1. На заседании парламента каждый депутат дал пощёчины двоим коллегам. Докажите, что этот парламент можно разбить на 3 палаты таким образом, чтобы никто из депутатов не попал в одну палату с обоими коллегами, которым он дал пощёчины.

2. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ выбраны точки E и F соответственно так, что треугольники ABE и BCF равновелики. Диагональ BD пересекает отрезки AE и AF в точках M и N соответственно. Докажите, что из отрезков BM, MN и ND можно составить треугольник.

3. На столе лежат 2017 камней. Два игрока, Петя и Вася, делают ходы по очереди (начинает Петя). В начале Петя может убрать из кучи один камень, после этого Вася может удалить 1 или 2 камня, затем Петя может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т.д.: на n-м ходу игрок может удалить от 1 до 2^{n-1} камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

4. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $abcd+ab+bc+cd+da=5$. Докажите, что $a+b+c+d \geq 4$.

5. Найдите все функции f: $R\to R$ такие, что для любых $x, y \in R$ выполняется равенство

$$f\big(x+f(f(y))\big)=y+f(f(x)).$$

6. Пусть H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, а M – середина стороны BC. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность с диаметром AH в точках P и Q, отличных от A. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Пару девятизначных чисел m и n назовём *загадочной*, если m и n отличаются только перестановкой цифр, ни одна из цифр не появляется в n дважды и n делится на m. Докажите, что каждое число в *загадочной* паре содержит цифру 8.

8. Пусть n – нечетное число. Произведение натуральных чисел a_1, …, a_n равно P. Докажите, что

$$(a_1^n+P, a_2^n+P, \ldots, a_n^n+P) \leq 2(a_1, a_2, \ldots, a_n)^n$$

(через $(x, y, \ldots, z)$ обозначен НОД чисел $x, y, \ldots, z$).