

Группа Старт. Первая лига. Тур 3

22 сентября

1. Два игрока, Первый и Второй, играют в следующую игру: они кладут на стол кучку из 2017 камней, дальше ходят по очереди. Начинает Первый. Первый может удалить 1 камень, после этого Второй может удалить 1 или 2 камня; после этого Первый может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т.д. На n -м ходу игрок может удалить от 1 до 2^{n-1} камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто может победить, как бы ни играл другой игрок?

2. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата 8×8 в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадратике 2×2 было ровно две синие и ровно две красные клетки?

3. В равенстве $9 \cdot \text{ОПИСЬ} = \text{ПИСЬМО}$ одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры. Какая цифра зашифрована буквой М?

4. Вова болтал по телефону и потратил половину имеющихся на балансе к началу разговора денег. Затем он передал телефон Диме, который болтал до тех пор, пока на балансе не осталось в два раза меньше денег, чем потратили Вова и Дима вместе. Во сколько раз дольше Димы по телефону говорил Вова?

5. Пару чисел m и n назовём *удивительной*, если m и n отличаются только перестановкой цифр и второе из них делится на первое. Какое наибольшее число чисел можно выписать в ряд, чтобы любые два идущих подряд числа образовывали удивительную пару?

6. Шахматную доску разрезали на квадратики 2×2 и прямоугольники 1×4 . Сколько квадратиков могло получиться?

7. В квадрате $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = AB$ и $\angle CPD = 90^\circ$. Докажите, что $DP = 2CP$.

8. Билеты нумеруются от 000000 до 999999. Билет называется *везучим*, если цифры его номера можно переставить и так расставить знаки «+», «−» и « \times » (по одному между каждыми рядом стоящими цифрами) и скобки, что после выполнения арифметических действий получится 0. Сколько существует везучих билетов?