Группа Старт. Высшая лига. Тур 3

22 сентября

1. Два игрока, Первый и Второй, играют в следующую игру: они кладут на стол кучку из 2017 камней, дальше ходят по очереди. Начинает Первый. Первый может удалить 1 камень, после этого Второй может удалить 1 или 2 камня; после этого Первый может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т.д. На n-м ходу игрок может удалить от 1 до 2^{n-1} камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто может победить, как бы ни играл другой игрок?

2. Сколькими способами можно покрасить клетки квадрата $n \times n$ в красный и синий цвета так, чтобы в любом квадратике 2×2 было ровно две синие и ровно две красные клетки?

3. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = 80^\circ$. На продолжении стороны AB за точку A отложили отрезок CD и получили точку K. Оказалось, что $KD \perp BC$. Найдите угол между AC и биссектрисой угла BCD.

4. В выпуклом 1000-угольнике никакие три диагонали не пересекаются в одной точке. Некоторые 500 диагоналей покрашены в красный цвет, а остальные — в синий. Из каждой вершины выходит ровно одна красная диагональ; каждую синюю диагональ пересекает хотя бы одна красная. Найдите наименьшее возможное количество пересечений красных диагоналей.

5. Дано натуральное число K. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_K$ не кратны 2^{K+1}. Для каждого натурального $n \geqslant K+1$ введем a_n следующим образом. Если остаток числа a_i при делении на 2^n — наименьший из всех остатков, получаемых при делении чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ на 2^n, то примем $a_n = 2a_i$. Если таких i несколько, то выберем наибольшее i. Докажите, что с некоторого момента последовательность постоянна.

6. Последовательность из 0 и 1 такова, что для всех $k > 2016$ если $a_{k-2016} + \ldots + a_{k-1} > 23$, то $a_k = 0$, а если $a_{k-2016} + \ldots + a_{k-1} \leqslant 23$, то $a_k = 1$. Докажите, что найдётся такое N, что при всех $n > N$ выполнено $a_{n+2017} = a_n$.

7. В квадрате $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = AB$ и $\angle CPD = 90^\circ$. Докажите, что $DP = 2CP$.

8. Пару различных девятизначных чисел m и n назовём *удивительной*, если m и n отличаются только перестановкой цифр, ни одна из цифр не появляется в n дважды и n делится на m. Докажите, что каждое число в удивительной паре содержит цифру 8. Напоминаем, что число не может начинаться с нуля.