Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2017
Юниор-лига. 3 тур. 22.09.17

1. На доске 9×9 отмечены несколько клеток. У какого наименьшего количества клеток доски может оказаться чётное число отмеченных соседей?

2. На столе лежат 2017 камней. Два игрока, Первый и Второй, делают ходы по очереди (начинает Первый). В начале Первый может убрать из кучи один камень, после этого Второй может удалить 1 или 2 камня, затем Первый может удалить 1, 2, 3 или 4 камня и т.д.: на n-м ходу игрок может удалить от 1 до 2^{n-1} камней. Игрок, после хода которого на столе не останется камней, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре?

3. Пусть H — ортоцентр остроугольного треугольника ABC, а M — середина стороны BC. Прямая, проходящая через точку M, пересекает окружность с диаметром AH в точках P и Q, отличных от A. Докажите, что ортоцентр треугольника APQ лежит на описанной окружности треугольника ABC.

4. Точки E и F расположены на сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно так, что треугольники ABE и BCF равновелики. Диагональ BD пересекает AE и AF в точках M и N соответственно. Докажите, что из отрезков BM, MN и ND можно составить треугольник.

5. Натуральное число $n > 2$ назовем *приятным*, если для любого натурального $k < n$ хотя бы одна из дробей $\frac{k}{n-k}$ и $\frac{n-k}{k}$ имеет конечную десятичную запись. Верно ли, что существует бесконечно много четных приятных чисел?

6. Положительные числа a, b, c,d удовлетворяют условию $abcd + ab + bc + cd + da = 5$. Докажите, что $a + b + c + d \geqslant 4$.

7. Пусть n – нечетное число. Произведение натуральных чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно P. Докажите, что $(a_1^n + P, \ldots, a_n^n + P) \leqslant 2(a_1, \ldots, a_n)^n$. (Здесь $(x, y, \ldots, z)$ обозначает наибольший общий делитель чисел $x, y, \ldots, z$.)

8. На заседании парламента каждый депутат дал пощёчины двоим коллегам. Докажите, что этот парламент можно разбить на 3 палаты таким образом, чтобы никто из депутатов не попал в одну палату с обоими коллегами, которым он дал пощёчины.