Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017

Гранд-лига. Полуфинал. 24.09.17

1. Высоты AD и BE остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямая, проходящая через центр O описанной окружности треугольника ABC параллельно BC, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Пусть M — середина AH. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMC$.

2. Для положительного рационального числа x обозначим через $f(x)$ число $p+q$, где $x = \frac{p}{q}$ и p и q — натуральные взаимно простые числа. Докажите, что если для некоторых натуральных m и n выполняется равенство $f(x) = f\left(\frac{mx}{n}\right)$, то $m - n$ делится на $f(x)$.

3. Сережа знает, как закрасить максимальное количество $N(n)$ клеток доски $n \times n$ так, чтобы никакие три подряд идущие клетки по вертикали, по горизонтали или по диагонали не были закрашены. Найдите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N(n)}{n^2}$.

4. Сумма неотрицательных чисел a, b, c, d равна 3. Докажите неравенство

$$\frac{a}{1+2b^3} + \frac{b}{1+2c^3} + \frac{c}{1+2d^3} + \frac{d}{1+2a^3} \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{3}.$$

5. Коля и Саша играют в игру на клетчатой доске 100×100. Коля начинает и своим ходом красит клетку в красный цвет, а Саша — в синий. Ходят по очереди, перекрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. В конце игры Коля ищет красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Саша платит ему столько рублей, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Коля, как бы ни играл Саша?

6. Найдите все пары многочленов $P(x)$, $Q(x)$ с действительными коэффициентами такие, что для всех действительных чисел x и y выполнено равенство

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y)).$$

7. Известно, что в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполнены следующие равенства: $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ; \angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной окружности треугольника ACD.

8. Пусть d — натуральный делитель натурального числа m, пусть $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ — бесконечные арифметические прогрессии натуральных чисел. Известно, что существуют натуральные i, j, k, l такие, что НОД$(a_i, b_j) = 1$ и НОД$(a_k, b_l) = m$. Докажите, что найдутся такие натуральные t, s, что НОД$(a_t, b_s) = d$.

9. На плоскости нарисованы 99 лучей, выходящих из одной точки. Среди этих лучей нашлись два, образующие тупой угол, причем внутри этого тупого угла не проведено ни одного луча. Какое наибольшее число тупых углов могут образовывать эти лучи?

10. Для натурального числа n оказалось, что каждое из чисел C_n^1, C_n^2, $\ldots$, C_n^{k-1} делится на n, а число C_n^k — нет. Докажите, что k — простое число.