Лига «Премьер». 24 сентября.
Полуфинал и Бой за 5-6 место.

1. Из букв *A, B, C* составляются слова (последовательности букв). Докажите, что количество слов длины n+1, в которых нет трёх различных букв подряд, втрое больше количества слов длины n, в которых нет двух соседних букв A или двух соседних букв *B*.

2. В выпуклом пятиугольнике *ABCDE* $\angle ADE = \angle ACB = 90^o$; $\angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$. Докажите, что прямая *BE* проходит через центр описанной окружности треугольника *ACD*.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{2} - x_1} + \sqrt{\frac{1}{2} - x_2} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{2} - x_{10}} = 6, \\ \sqrt{\frac{1}{2} + x_1} + \sqrt{\frac{1}{2} + x_2} + \cdots + \sqrt{\frac{1}{2} + x_{10}} = 8. \end{cases}$$

4. Окружность проходит через вершину *A* треугольника, пересекает его стороны *AB* и *AC* в точках *P* и *Q* и пересекает сторону *BC* в точках *R* и *S*. Докажите, что если *PQ* || *BC*, то биссектриса угла *A* делит дугу *RS* этой окружности пополам.

5. Для натурального числа n оказалось, что каждое из чисел $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{k-1}$ делится на n, а число C_n^k– нет. Докажите, что k – простое число.

6. Коля и Саша играют в игру на клетчатой доске 100×100. Коля начинает и своим ходом красит клетку в красный цвет, а Саша – в синий. Ходят по очереди, перекрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. В конце игры Коля ищет красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Саша платит ему столько рублей, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Коля, как бы не играл Саша?

7. Даны две последовательности натуральных чисел $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Известно, что $a_{n+1} = a_n + \left[\sqrt{b_n}\right]$ и $b_{n+1} = b_n + \left[\sqrt{a_n}\right]$ при всех натуральных n. Докажите, что a_k=b_k при некотором натуральном k.

8. Найдите все пары многочленов *P(x), Q(x)* с действительными коэффициентами таких, что для всех действительных чисел x и y выполнено равенство

$$P(x + Q(y)) = Q(x + P(y)).$$