Группа Старт. Высшая лига. Тур 4

24 сентября

1. На плоскости нарисованы 99 лучей, выходящих из одной точки M. Среди этих лучей нашлись два, образующие тупой угол, причем внутри этого тупого угла не проведено ни одного луча. Какое наибольшее число тупых углов могут образовывать эти лучи?

2. В финале математической олимпиады участвовали шесть школьников: Аня (А), Боря (Б), Вера (В), Галя (Г), Дима (Д) и Егор (Е). После проверки оказалось, что победителями стали трое. Всем участникам предложили угадать, кто победил, и каждый назвал трёх человек. Были получены такие ответы: А, Б, Г; А, В, Д; А, Г, Д; Б, В, Д; Б, Г, Д; В, Г, Д. Всех победителей не угадал никто: три человека угадали двоих победителей, два человека одного победителя, а один отгадывавший не угадал вообще никого. Какие школьники победили в олимпиаде?

3. Для натурального числа n оказалось, что каждое из чисел C_n^1, C_n^2, $\ldots$, C_n^{k-1} делится на n, а число C_n^k — нет. Докажите, что k — простое число.

4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) угол при вершине A равен $80°$. На сторонах BC и AC отмечены точки D и E соответственно так, что $\angle BAD = 50°$, $\angle ABE = 30°$. Докажите, что $\angle BED = 40°$.

5. Коля и Саша играют в игру на клетчатой доске 100×100. Коля начинает и своим ходом красит одну клетку в красный цвет, а Саша — в синий. Ходят по очереди, перекрашивать ранее закрашенные клетки нельзя. В конце игры Коля ищет красный клетчатый прямоугольник наибольшей площади, и Саша платит ему столько рублей, сколько в этом прямоугольнике клеток. Какой наибольший заработок может гарантировать себе Коля, как бы ни играл Саша?

6. Даны две последовательности натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$. Известно, что $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{b_n}\,]$ и $b_{n+1} = b_n + [\sqrt{a_n}\,]$ при всех натуральных n. Докажите, что $a_k = b_k$ при некотором натуральном k. Напомним, что $[\sqrt{x}\,]$ обозначает наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит x.

7. Точки A, B, C и D лежат на одной прямой в указанном порядке. Точка E вне прямой такова, что $\angle AEB = \angle BEC = \angle CED = 45°$. Обозначим через F и G середины отрезков AC и BD соответственно. Найдите градусную меру угла FEG.

8. Имеется n положительных чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Петя написал на доске n дробей $\frac{x_1-x_2}{x_1+x_2}$, $\frac{x_2-x_3}{x_2+x_3}$, $\ldots$, $\frac{x_{n-1}-x_n}{x_{n-1}+x_n}$, $\frac{x_n-x_1}{x_n+x_1}$, а Вася записал в тетрадку все возможные произведения нечётного количества из выписанных Петей дробей. Докажите, что сумма всех чисел в васиной тетрадке равна нулю.