Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ "Орлёнок", 19–25.09.2017
Юниор-лига. 4 тур. 24.09.17

1. Окружность проходит через вершину A треугольника, пересекает его стороны AB и AC в точках P и Q и пересекает сторону BC в точках R и S. Докажите, что если $PQ \parallel BC$, то биссектриса угла A делит дугу RS этой окружности пополам.

2. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ $\angle ADE = \angle ACB = 90^\circ; \angle DEA = \angle DAC = \angle CBA$. Докажите, что прямая BE проходит через центр описанной окружности треугольника ACD.

3. Сережа хочет закрасить некоторые клетки доски 8×8 так, чтобы никакие три подряд идущие клетки (по вертикали или горизонтали) не были закрашены. Какое наибольшее число клеток ему удастся закрасить?

4. $2k$ команд провели круговой турнир по волейболу: каждая команда по одному разу сыграла со всеми остальными. В результате оказалось, что невозможно расположить по кругу более трёх команд так, чтобы каждая обыграла следующую. Докажите, что все команды можно разбить на две конференции по k команд в каждой, в которых нельзя расположить таким образом и три команды.

5. В финале математической олимиады участвовали шесть школьников: Аня (А), Боря (Б), Вера (В), Галя (Г), Дима (Д) и Егор (Е). После проверки оказалось, что победителями стали трое. Всем участникам предложили угадать, кто победил, и каждый назвал трёх человек. Были получены такие ответы: А, Б, Г; А, В, Д; А, Г, Д; Б, В, Д; Б, Г, Д; В, Г, Д. Всех победителей не угадал никто: три человека угадали двоих победителей, два человека одного победителя, а один отгадывавший не угадал вообще никого. Какие школьники победили в олимпиаде?

6. Для положительного рационального числа x обозначим через $f(x)$ число $p+q$, где $x = \frac{p}{q}$ и p и q – натуральные взаимно простые числа. Докажите, что если для некоторых натуральных m и n выполняется равенство $f(x) = f(\frac{mx}{n})$, то $m - n$ делится на $f(x)$.

7. Даны две последовательности натуральных чисел $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Известно, что $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{b_n}\ ]$ и $b_{n+1} = b_n + [\sqrt{a_n}\ ]$ при всех натуральных n. Докажите, что $a_k = b_k$ при некотором натуральном k.

8. Для натурального числа n оказалось, что каждое из чисел C_n^1, C_n^2, $\ldots$, C_n^{k-1} делится на n, а число C_n^k – нет. Докажите, что k – простое число.