Двенадцатый Южный математический турнир
ВДЦ «Орлёнок», 18–26.09.2017

Гранд-лига. Финал. 25.09.17

1. Дан параллелограмм $ABCD$. X произвольная точка. O_1, O_2, O_3, O_4 — центры описанных окружностей треугольников ABX, BCX, CDX, DAX. Докажите, что угол между прямыми O_1O_3 и O_2O_4 не зависит от выбора точки X.

2. Тетраэдр $ABCD$ лежит внутри единичного куба. Пусть M и N — середины ребер AB и CD. Докажите, что $AB \cdot CD \cdot MN \leqslant 2$.

3. Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$ — действительные числа, сумма которых равна 0. Докажите, что

$$2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2n-1}^2) \geqslant (x_1 - x_n)^2 + (x_2 - x_n)^2 + \ldots + (x_{2n-1} - x_n)^2.$$

4. Анна и Банана играют в следующую игру. В начале Анна пишет какое-то слово W, после этого Банана называет целое неотрицательное число $k \geqslant 2$. Если Анна сможет написать слово S, для которого существует ровно k способов вычеркнуть некоторые буквы так, чтобы получилось слово W, то она побеждает. Иначе побеждает Банана. Сколько существует n-буквенных слов W, состоящих из букв А и Б, для которых Анна может выиграть вне зависимости от числа, которое назовёт Банана?

5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружность ω касается прямой AB в точке B и касается отрезка AC в некоторой точке K. Пусть окружность ω пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках B и P. Пусть Q — проекция точки K на BC. Докажите, что $\angle CPQ = 2\angle ACB$.

6. На координатной плоскости расположено несколько *стен* — непересекающихся (в том числе по вершинам) отрезков, не параллельных осям координат. Бульдозер стартует из некоторой точки плоскости параллельно одной из осей координат. Каждый раз, когда бульдозер встречает стену, он поворачивает на 90 градусов так, чтобы продолжить движение (через стену бульдозер ездить не умеет и не проезжает через концы отрезков). Докажите, что никогда не наступит момент времени, до которого бульдозер встретит каждую стену с обеих сторон.

7. Найдите все натуральные n, для которых существует действительное число a такое, что оба числа $a + \sqrt{2}$, $a^n + \sqrt{2}$ рациональны.

8. Последовательность рациональных чисел $x_1, x_2, \ldots$ определяется правилами: $x_1 = \dfrac{4}{3}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2}{x_n^2 - x_n + 1}$ для $n \geqslant 1$. Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$, где a_n и b_n — взаимно простые натуральные числа. Докажите, что a_n — точный квадрат.

9. Пусть $p > 100$ — простое число. Докажите, что найдутся натуральные числа m и n такие, что $m + n \leqslant \dfrac{p+1}{2}$ и $2^m \cdot 3^n - 1$ делится на p.

10. Докажите, что в любом слове, в котором не более 10 различных букв, можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы — одинаковыми цифрами, разные буквы — разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.