Лига «Премьер». 25 сентября. Финал.

1. Найдите все такие натуральные n такие, что $4^n+6^n+9^n$ – квадрат натурального числа.

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки E и D соответственно. Оказалось, что $\angle ABD + \angle BCE = \angle ACE + \angle CBD$ и $BD=CE$. Докажите, что $AB=AC$.

3. Докажите, что в любом слове, в котором не более 10 различных букв, можно заменить буквы цифрами (одинаковые буквы – одинаковыми цифрами, разные буквы – разными цифрами) так, что получившееся число будет делиться на 9.

4. Пусть дано простое число $p>5$. Докажите, что найдутся натуральные m и n такие, что $m+n<p$ и $2^m \cdot 3^n-1$ делится на p.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки P и Q – основания перпендикуляров, опущенных из D на прямые AB и AC. Докажите, что треугольник APQ и четырёхугольник $BCQP$ равновелики тогда и только тогда, когда центр описанной окружности ABC лежит на PQ.

6. Дано конечное множество натуральных чисел C. Назовём *простыми разностями* целые числа, которые можно получить, вычтя из какого-нибудь элемента C целое неотрицательное число, в десятичной записи которого не более 10 цифр, и все они – нули и единицы (например, 1010101010, 110 или 0). *Сложными разностями* назовём целые числа, которые можно получить, вычтя из какого-нибудь элемента C целое неотрицательное число, в десятичной записи которого не более 10 цифр, и все они – нули, единицы, двойки и тройки (например, 1230002 или 0). Докажите, что количество сложных разностей превосходит количество простых разностей не более, чем в 1024 раза.

7. На координатной плоскости расположено несколько *стен* – непересекающихся отрезков, не параллельных осям координат. Бульдозер стартует из некоторой точки плоскости параллельно одной из осей координат. Каждый раз, когда бульдозер встречает стену, он поворачивает на 90 градусов так, чтобы продолжить движение (через стену бульдозер ездить не умеет). Докажите, что бульдозер никогда не сможет встретить каждую стену с обеих сторон.

8. Каждое из положительных действительных чисел a, b, c не превосходит 2. Докажите неравенство $a+b+c+2\geq abc$.